Erläuterungen der Kästnerischen Analysis endlicher Größen.

Mannheim,
bei C. F. Schwan, Churfürstl. Hofbuchhändler.
1776.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Erläuterungen
der
Kästnerischen Analysis
endlicher Größen.

§. 76.

Diese Aufgabe läßt sich auf eine zweifache Art auflösen; eigentlich führen die in ihr gegebenen Stücke unmittelbar auf eine unreine quadratische Gleichung, und die Aufgabe scheint daher bei dem ersten Anblick nicht hierher zu gehören, da sie eine Anwendung von 75. sein soll. Nennt man nämlich die gesuchten Zahlen x, z, so hat man unmittelbar aus der Aufgabe

1.) $x + z = a$

2.) $x^2 + z^2 = b$

also aus 1.

$$x = a - z$$

aus 2.

$$x = \sqrt{(b - z^2)}$$

 dieses

dieses giebt

$$a - z = \sqrt{(b - z^2)}$$

und

$$a^2 - 2az + z^2 = b - z^2$$

folglich

$$z^2 = az + \frac{b - a^2}{2}$$

welches eine unreine quadratische Gleichung ist, worauf die in der Aufgabe gegebene Stücke unmittelbar führen, und die sich erst aus 78. auflösen läßt, wenn man daselbst $p = a$ und $q = \frac{b - a^2}{2}$ setzt. Aber nach der Voraussetzung des 13. S. Trig. kommt man auf eine reine quadratische Gleichung, deren Auflösung sich schon aus 75. ergiebt.

Dieses ist ein Beweis, wie man durch die Verbindung anderswoher bekannter Eigenschaften der unbekannten Größen mit denen, welche in der Aufgabe selbst gegeben sind, oft auf weit weniger verwickelte Gleichungen kommt, als wenn man blos aus den in der Aufgabe selbst bestimmten Eigenschaften der gesuchten Größen eine Gleichung zwischen gegebenen und gesuchten Größen herleiten wollte.

§. 95.

Aus der Lehre von den Combinationen ist klar, daß sich aus fünf Größen zehen verschiedene

Verbindungen nach dreien machen lassen; da nun jedesmal durch drei von den fünf Größen a, u, n, d, s die beiden übrigen bestimmt werden, so erhellet, daß es in der Lehre von den arithmetischen Progressionen zehen verschiedene Aufgaben giebt, die ich hier nach der Reihe hersetzen will.

I.

Aus dem ersten Glied, dem letzten und der Zahl der Glieder, die Summe und die Differenz der Glieder zu finden.

Aufl.

1.) $s = \frac{(a+u).n}{2}$ §. 85. 86.

und $u = (n-1)\,d + a$ §. 87.

also 2.) $d = \frac{u-a}{n-1}$;

Um also zwischen zwo Zahlen a und u, m mittlere arithmetische Proportionalzahlen zu finden, setze man nur in diesen Gleichungen m + 2 statt n; dadurch ergiebt sich

$$d = \frac{u-a}{(m+2)-1}$$

$$= \frac{u-a}{m+1}$$

Ex. Es sei a = 3, u = 17, m = 5, so ist

$$d = \frac{17-3}{5+1} = \frac{14}{6} = 2\tfrac{1}{3}$$

 und

und die Reihe demnach folgende

$$3,\ 5\tfrac{1}{3},\ 7\tfrac{2}{3},\ 10,\ 12\tfrac{1}{3},\ 14\tfrac{2}{3},\ 17$$

II.

Aus den beiden äussersten Gliedern a, u, nebst der Differenz d, die Zahl der Glieder und ihre Summe zu finden.

Aufl. Aus der Gleichung $d = \frac{u-a}{n-1}$ in I. folgt

$$n - 1 = \frac{u-a}{d}, \text{ folglich}$$

$$1.)\ n = \frac{u-a}{d} + 1$$

und $$s = \frac{n.(a+u)}{2}$$

$$= \frac{(u-a).(u+a)}{2d} + \frac{a+u}{2} \text{ oder}$$

$$2.)\ s = \frac{u^2 - a^2 + (a+u)\,d}{2d}$$

Es kann sich zutragen, daß die Gleichung

$$n = \frac{u-a}{d} + 1 = \frac{u-a+d}{d}$$

für n einen Bruch giebt. In diesem Fall zeigt der Werth von n an, daß die Reihe, deren Gestalt schon durch die beiden Stücke a und d bestimmt ist, eigentlich kein Glied enthält, das dem gegebenen u gleich wäre, sondern daß es zwischen zwei in dieser Progression befindlichen

Gliedern

Gliedern liegt. Ist z. B. $a = 4$, $d = 3$, $u = 27$ so erhält man $n = \frac{27 + 3 - 4}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$, wobei sich dem ersten Anblick nach nichts denken läßt. Folgende Betrachtung aber wird zeigen, was eigentlich ein solcher Ausdruck bedeute. Da $a = 4$, $d = 3$, so ist die Gestalt der Reihe folgende:

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 - - - (Q.)

wo das achte Glied 25, und das neunte 28 ist, die Anzahl der Glieder muß also kleiner als 9, aber größer als 8 sein, weil $u = 27$ zwischen die beiden Glieder 25, 28 fällt. Aus der Gleichung $n = 8\frac{2}{3}$ ist überdas auch bestimmt, wo eigentlich das gegebene letzte Glied u zwischen 25 und 28 liegt; die Entfernung des 8ten Gliedes vom nten soll nämlich zwei Drittheile von der Entfernung des 8ten vom 9ten Gliede betragen; d. h. wenn man zwischen 25 und 28 noch zwo mittlere arithmetische Proportionalzahlen sucht, wofür man 26 und 27 erhält, so hat man diese vier Zahlen 25, 26, 27, 28, und man gelangt von 25 zu 28, wenn man der arithmetischen Reihe gemäß steigt, durch drei Stufen, wo 28 von 25 um diese drei, und 27 von 25 um zwo solcher Stufen entfernt ist.

Da nun des nten Glieds u Entfernung von 25, $\frac{2}{3}$ soviel, als die Entfernung des Gliedes 28 von 25 beträgt, so ist klar, daß, da man in Q von 25 zu 27 durch zwo Stufen gelangt, dergleichen 25 von dem in der Reihe Q zunächst

folgenden Gliede um drei absteht, 27 das gesuchte nte oder $8\frac{2}{3}$te Glied in Q ist, wie sich aus der Gleichung ergab.

Kommt man also auf einen Werth von n, der $= b + \frac{m}{q+1}$, so, daß $m < q + 1$, so ist die Bedeutung hiervon eigentlich diese: das gegebene Glied u liegt zwischen dem bten und $b+1$ten Gliede der schon bestimmten Reihe, und wenn man zwischen diesen beiden Gliedern q mittlere arithmetische Proportionalzahlen sucht, so ist das mte Glied von diesen das gegebene, also in der bestimmten Reihe (wie Q) das nte.

Man kann sich dieses auch so vorstellen, welches mit dem bisherigen beinahe einerlei ist.

Jede arithmetische Progression läßt sich in eine andere von mehrerern Gliedern verwandeln, so daß die schon vorhandenen Glieder alle stehen bleiben, wenn man nämlich vor jedes Glied andere Zahlen setzt, die mit den schon vorhandenen eine einzige arithmetische Progression ausmachen. Kommt man also auf einen Werth von n, der $= b + \frac{m}{q+1}$, so kann man allemal vor jedes Glied der Reihe, deren Gestalt schon bestimmt ist, noch q Glieder setzen, die mit den schon vorhandenen in einer arithmetischen Progression fortgehen. Auf diese Art wird aus der Reihe Q diese

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28;

Hier ist 4 das dritte in Q das 1te, 7 das sechste in Q das zweite, 10 das 9te in Q das dritte u. s. f. überhaupt das nte in Q ist hier das 3nte Glied, folglich das $8\frac{2}{3}$te oder $\frac{26}{3}$te Glied in Q hier das 26te. Auf diese Art wird begreiflich, was n eigentlich bedeute, wenn es ein uneigentlicher Bruch ist.

III.

Aus dem letzten Glied, der Zahl der Glieder und der Differenz, das erste Glied und die Summe zu finden.

Aufl. Aus $u = a + (n-1)\,d$ folgt

$$1.)\quad a = u + (1-n)\,d$$

und

$$2.)\quad s = \frac{(a+u)\,n}{2}$$

$$= \frac{(u + (1-n)\,d + u).\,n}{2}$$

$$= \frac{(2u + (1-n)\,d).\,n}{2}$$

IV.

Aus dem ersten Glied, dem letzten, und der Summe die Differenz nebst der Zahl der Glieder zu finden.

Aufl. Da $s = \frac{(a+u)\,n}{2}$

so ist $\quad$ 1.) $n = \frac{2s}{a+u}$

Ferner ist $\quad d = \frac{u-a}{n-1}$

$$= \frac{u-a}{(2s:(a+u))-1}$$

$$= \frac{u-a}{(2s-(a+u)):a+u}$$ also

$$2.)\ d = \frac{u^2-a^2}{2s-(a+u)}$$

V.

Aus dem letzten Glied, der Differenz der Reihe, und der Summe, das erste Glied nebst der Zahl der Glieder zu finden.

Aufl. Aus $d = \frac{u^2-a^2}{2s-(a+u)}$ ergiebt sich

$$2ds - ad - ud = u^2 - a^2$$

also

$$a^2 - ad = u^2 + ud - 2ds$$

und

$$a^2 - ad + \tfrac{1}{4}d^2 = u^2 + ud - 2ds + \tfrac{1}{4}d^2$$

oder $\quad (a-\tfrac{1}{2}d)^2 = (u+\tfrac{1}{2}d)^2 - 2ds$

folglich

$$a - \tfrac{1}{2}d = \sqrt{((u+\tfrac{1}{2}d)^2 - 2ds)}$$

und daher

$$1.)\ a = \tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{((u+\tfrac{1}{2}d)^2 - 2ds)}$$

Man

Man hat ferner aus III

$$2\,s = (2u + d - dn).\,n$$
$$= 2\,un + dn - dn^2$$

Dieß giebt

$$\frac{2\,s}{d} = \frac{2\,un}{d} + n - n^2,$$

und

$$n^2 - \frac{(2u + d)\,n.}{d} = \frac{2\,s}{d};$$

$$n^2 - \left(\frac{2u+d}{d}\right).n + \left(\frac{2u+d}{2d}\right)^2 = \frac{2\,s}{d} + \left(\frac{2u+d}{2\,d}\right)^2.$$

folglich

$$n - \frac{2\,u + d}{2\,d} = \sqrt{\left(\frac{8\,ds + (2\,u + d)^2}{4\,d^2}\right)}$$

und

$$n = \frac{2\,u + d \pm \sqrt{(8\,ds + (2u + d)^2)}}{2\,d}$$

VI.

Aus dem ersten Glied, der Zahl der Glieder und der Summe, die Differenz und das letzte Glied zu finden.

Aufl. Weil $s = \frac{(a + u).\,n}{2}$, so hat man

$$2\,s = an + un,$$

also

$$1.)\; u = \frac{2\,s - an}{n}$$

Hieraus

Hieraus ergiebt sich

$$d = \frac{u - a}{n - 1}$$

$$= \frac{\frac{2s - an}{n} - a}{n - 1}$$

$$= \frac{(2s - an - an) : n}{n - 1} \text{ oder}$$

$$2.)\ d = \frac{2\,(s - an)}{n.\,(n - 1)}$$

VII.

Aus dem letzten Glied, der Zahl der Glieder, und der Summe, das erste Glied und die Differenz zu finden.

Aufl. Aus $u = \frac{2s - an}{n}$ folgt

$$un = 2s - an, \text{ also}$$

$$1.)\ a = \frac{2s - un}{n}$$

demnach $d = \frac{u - a}{n - 1}$

$$= \frac{u - \left(\frac{2s - un}{n}\right)}{n - 1}$$

$$= \frac{un - 2s + un}{n.\,(n - 1)}$$

oder $2.)\ d = \frac{2\,(un - s)}{n.\,(n - 1)}$

VIII.

VIII.

Aus der Differenz, der Zahl der Glieder, und der Summe, das erste und letzte Glied zu finden.

Aufl. Die Gleichung (VI.) $d = \frac{2(s-an)}{n.(n-1)}$

giebt $\frac{d.\ n.\ (n-1)}{2} = s - an$, also

$$1.)\ a = \frac{2s - n.\ (n-1)\ d.}{2n}$$

Eben so giebt die Gleichung (VII. 2.)

$\frac{n.\ (n-1).\ d}{2} = un - s$, mithin

$$2.)\ u = \frac{n.\ (n-1).\ d + 2s}{2n}$$

IX.

Aus dem ersten Glied, der Zahl der Glieder, und der Differenz, das letzte und die Summe zu finden.

Aufl. Es ist

$$1.)\ u = a + (n-1)\ d$$

und daher $s = \frac{(a+u).\ n}{2}$

$= \frac{(a + a + (n-1)\ d).\ n}{2}$ also

$$2.)\ s = \frac{2an + (n^2 - n)\ d}{2}$$

X.

Aus dem ersten Glied, der Differenz, und der Summe, das letzte und die Zahl der Glieder zu finden.

Aufl. Aus (IX. 2.) ist

$$2 ſ = dn^2 + (2a - d) n$$

$$\frac{2ſ}{d} = n^2 + (\frac{2a-d}{d}). n$$

Folglich

$$n^2 + (\frac{2a-d}{d}). n + (\frac{2a-d}{2d})^2 = \frac{2ſ}{d} + (\frac{2a-d}{2d})^2$$

und

$$n + \frac{2a-d}{2d} = \sqrt{(\frac{2ſ}{d} + (\frac{2a-d}{2d})^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{(8dſ + (2a-d)^2)}}{2d}$$

Hieraus wird

$$1.)\ n = \frac{d - 2a \pm \sqrt{(8dſ + (2a-d)^2)}}{2d}$$

Ferner $ſ = (\frac{a+u}{2}). n$

$$= (\frac{a+u}{2}). \quad (\frac{u-a+d}{d})$$

$$= \frac{u^2 - a^2 + du + da}{2d}$$

also $\quad 2dſ = u^2 - a^2 + du + da;$

und $\quad 2dſ + a^2 - da = u^2 + du$

$$2dſ + a^2 - da + \tfrac{1}{4}d^2 = u^2 + du + \tfrac{1}{4}d^2$$

Dieses

Dieses giebt

$$\sqrt{(2ds + a^2 - da + \tfrac{1}{4}d^2)} = u + \tfrac{1}{2}d$$

folglich

$$2.)\ u = -\tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(2ds + a^2 - da + \tfrac{1}{4}d^2)}$$
$$= -\tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(2ds + (a - \tfrac{1}{2}d)^2)}$$

Ex. Man trift mit einem Arbeiter den Accord, daß man ihm bei Grabung eines Brunnens für den ersten Fuß 8 Gr., für den zweeten 10, für den dritten 12 u. s. f. für jeden folgenden allemal 2 Gr. mehr, als für den zunächst vorhergehenden geben wolle. Darauf zahlt man ihm 10 Thlr. zum voraus; wie tief ist er nun zu graben verbunden?

Man hat hier das erste Glied, die Differenz, und die Summe einer arithmetischen Progression, nämlich $a = 8$, $d = 2$, und $s = 10$ Thlr. $= 360$ Gr. Daraus erhält man

$$n = \frac{2 - 16 + \sqrt{(8.2.360 + (16 - 2)^2)}}{4}$$

$$= \frac{-14 + \sqrt{5956}}{4}$$

$$= \frac{-14 + 77,1}{4} = 15,7$$

weil sich hier nur das obere Zeichen vor dem Wurzelzeichen gebrauchen läßt. Der Arbeiter ist demnach verbunden, 15, 7 Fuß für die vorauszahlte 10 Thlr. zu graben. Würde er in der Arbeit verhindert, daß er nur 10 Fuß tief graben könnte, so ergäbe sich aus (IX. 2.), wieviel er

er dem, der die Arbeit bis auf 15, 7. Fuß fortsetzte, herausgeben müßte; er selbst bekäme nämlich in diesem Fall

$$\frac{2.8.10 + (100 - 10).2}{2}$$

$= 170$ Gr. $= 4$ Thlr. 26. Gr.

und müßte also dem zweeten Arbeiter 5 Thlr. 10 Gr. abgeben.

§. 102.

Auch hier lassen sich, wie in 95, zehen verschiedene Aufgaben machen. Nämlich

I.

Aus dem ersten Glied, dem Exponenten, und der Zahl der Glieder, das letzte und die Summe zu finden.

Aufl. Aus 96 erhält man 1.) $u = e^{n-1}a$, und aus 98 ergiebt sich der Werth von $\int$, den man noch leichter so findet: es ist

$\int = a + ea + e^2a + e^3a ----- + e^{n-1}a$, also

$e\int = \quad ea + e^2a + e^3a + e^4a --- + e^na$

und $e\int - \int$ oder

$(e-1).\int = (ea + e^2a --- + e^{n-1}a + e^na) - (a + ea --- + e^{n-1}a)$

$= e^na - a$, folglich

$$2.)\ \int = \frac{e^na - a}{e - 1}$$

II.

II.

Aus dem ersten Glied, dem Exponenten und dem letzten, die Zahl der Glieder und die Summe zu finden.

Aufl. Weil $u = e^{n-1}a$, so hat man

$$\frac{u}{a} = e^{n-1} \text{ und in Logarithmen}$$

$$lu - la = (n-1).\ le, \text{ folglich}$$

$$1.)\ n = \frac{lu - la}{le} + 1$$

und aus I.

$$\int = \frac{e^n a - a}{e - 1}$$

$$= \frac{e^{n-1} e\, a - a}{e - 1} \text{ oder}$$

$$2.)\ \int = \frac{ue - a}{e - 1};$$

Man kann auch hier solche Werthe für n bekommen, die Brüche sind, wenn gleich a, e und u ganze Zahlen sind, welches anfangs wieder einige scheinbare Ungereimtheiten giebt, die sich aber völlig, wie bei den arithmetischen Reihen, heben lassen.

III.

Aus dem ersten Glied, dem Exponenten und der Summe, das letzte und die Zahl der Glieder zu finden.

Aufl. Aus I. ist

$$ſ = \frac{e^n a - a}{e - 1}$$

also $(e - 1) . ſ + a = e^n a$ und

$$\frac{(e - 1) . ſ + a}{a} = e^n, \text{ folglich}$$

$$l((e - 1) . ſ + a) - la = n\,le, \text{ und}$$

$$1.)\ n = \frac{l((e - 1) . ſ + a) - la}{le}$$

Ferner ergiebt sich aus II.

$$2.)\ u = \frac{eſ - ſ + a}{e}$$

IV.

Aus dem ersten Glied, dem letzten und der Summe, den Exponenten und die Zahl der Glieder zu finden.

Aufl. Die Gleichung $\frac{ue - a}{e - 1} = ſ$ giebt

$$ſe - ſ = ue - a \text{ oder}$$

$$ſe - ue = ſ - a, \text{ also}$$

$$1.)\ e = \frac{ſ - a}{ſ - u}$$

demnach

$$le = l(ſ - a) - l(ſ - u)$$

und daher aus (II. 1.)

$$2.)\ n = \frac{lu - la}{l(ſ - a) - l(ſ - u)}$$

V. Aus

V.

Aus dem ersten Glied, der Zahl der Glieder und dem letzten, den Exponenten und die Summe zu finden.

Aufl. Weil $u = e^{n-1}a$, so ist

$$\frac{u}{a} = e^{n-1}, \text{ und}$$

$$1.)\ \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = e;$$

Daraus wird

$$f = \frac{ue - a}{e - 1} \text{ oder}$$

$$2.)\ f = \frac{u\left(\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}\right) - a}{\left(\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}\right) - 1}$$

Hierdurch lassen sich zwischen zwo Zahlen a und u, m mittlere geometrische Proportionalzahlen finden, wenn man nur m + 2 statt n in 1 setzt; dadurch erhält man nämlich

$$e = \sqrt[m+1]{\frac{u}{a}}$$

Ex. Für u = 256, a = 2 und m = 6 wird

$$e = \sqrt[7]{\frac{256}{2}} = \sqrt[7]{128} = 2,$$

also ist die Reihe folgende

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256.

VI.

Aus dem letzten Glied, der Zahl der Glieder und dem Exponenten, das erste und die Summe zu finden.

Aufl. Die Gleichung $u = e^{n-1} a$ giebt

$$1.)\ a = \frac{u}{e^{n-1}}$$

Folglich

$$\frac{ue - a}{e - 1} = \frac{ue - u : e^{n-1}}{e - 1}$$

oder

$$2.)\ f = \frac{ue - u : e^{n-1}}{e - 1}:$$

VII.

Aus dem Exponenten, der Zahl der Glieder und der Summe, das erste und letzte Glied zu finden.

Aufl. Aus $(e-1)\ f + a = e^n a$ giebt sich

$$(e-1)\ f = e^n a - a$$
$$= a.\ (e^n - 1)$$ also

$$1.)\ a = \frac{fe - f}{e^n - 1}$$

Daraus folgt $u = e^{n-1} a$,

$$2.)\ = \frac{e^{n-1}\ (fe - f)}{e^n - 1}$$

VIII.

Aus dem letzten Glied, dem Exponenten und der Summe, das erste und die Zahl der Glieder zu finden.

Aufl.

Aufl. Aus (III. 2.) ist

$$u = \frac{se - s + a}{e}, \text{ also}$$

$$ue = se - s + a$$

$$a = ue + s - se, \text{ oder}$$

$$1.)\ a = (u - s)\,e + s$$

Ferner aus (II. 1.)

$$n = \frac{lu - la}{le} + 1 \text{ mithin}$$

hier $2.)\ n = \frac{lu - l\,(ue - se + s)}{le} + 1;$

IX. und X.

Es sind jetzt noch zwo Aufgaben übrig, nämlich

1.) Aus dem ersten Glied, der Zahl der Glieder und der Summe, das letzte und den Exponenten zu finden.

2.) Aus dem letzten Glied, der Zahl der Glieder und der Summe, das erste und den Exponenten zu finden.

Beide setzen aber die Lehre von den Gleichungen voraus, und lassen sich daher hier noch nicht gehörig auflösen. Man hat nämlich aus der allgemeinen Vorstellung der geometrischen Reihen

$$s = a + ae + ae^2 + ae^3 \cdots + ae^{n-1}$$

$$= a.\,(1 + e + e^2 + e^3 \cdots + e^{n-1})$$

also $\frac{s}{a} = 1 + e + e^2 + e^3 \cdots + e^{n-1}$

und $\left(1 - \frac{s}{a}\right) + e + e^2 + e^3 \cdots + e^{n-1} = 0$; N)

Wie man nun hier e findet, wird unten (§. 304 - 321.) gezeigt.

Hat man auf diese Art e gefunden, so ergiebt sich auch daraus u, weil $u = e^{n-1}a$; wollte man aber u unmittelbar berechnen, ohne erst e zu suchen, so müßte man so verfahren. Aus den beiden Gleichungen

$u = e^{n-1}a$ und $e = \frac{s-a}{s-u}$ (IV. 1.)

erhält man $u = \left(\frac{s-a}{s-u}\right)^{n-1} a$, also

$$a. (s-a)^{n-1} = u. (s-u)^{n-1}; \text{ (Q)}$$

Es sei demnach $a. (s-a)^{n-1} = m$, so ist

$$m = u. (s-u)^{n-1}; \text{ (P.)}$$

Dieses nur einigermaßen zu entwickeln, wird mir erlaubt sein, den Satz 141. hier vorauszusetzen. Vermöge dieses Satzes erhält man aus (P.) m = (R

$$s^{n-1}u - (n-1).\, s^{n-2}u^2 + \frac{(n-1).(n-2)}{1.\quad 2.} s^{n-3}u^3 \cdots - u^n$$

oder, wenn man $s^{n-1} = \alpha$, $(n-1)\, s^{n-2} = \beta$, und so die übrigen Coefficienten der unbekannten Größe nach der Reihe γ, δ, u. s. f. nennt, so wird $m = \alpha u - \beta u^2 + \gamma u^3 - \delta u^4 + \varepsilon u^5 \cdots u^n$ und P.)

m − αu

$m - \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 - \varepsilon u^5 \ldots u^n = 0$ wo u^n das Zeichen + oder − vor sich hat, nachdem n gerad oder ungerad ist. Wie man hieraus wieder u finde, kommt unten a. a. O. vor. So wäre also die erste Aufgabe, so weit es hier angeht, aufgelöst.

Für die zwote Aufgabe hat man aus (Q.) u. $(f - u)^{n-1} = m = a. (f - a)^{n-1}$, also wie in R, daselbst a statt u gesetzt, $m = f^{n-1}a - (n-1) f^{n-2}a^2 + \frac{(n-1).(n-2)}{1.2} f^{n-3}a^3 \ldots a^n$ und hieraus ergiebt sich eine Gleichung, wie die P, wenn man nur a statt u setzt, $m - \alpha a + \beta a^2 - \gamma a^3 + \delta a^4 - \varepsilon a^5 \ldots a^n = 0$;

Weis man hieraus den Werth von a, so ergiebt sich aus den vorigen Aufgaben auch e; aber ohne zuvor a zu suchen, ließe sich e unmittelbar so finden. Es ist klar, daß sich in jeder geometrischen Progression a und u mit einander verwechseln lassen, wenn man statt e, $\frac{1}{e}$ setzt. Dadurch ergiebt sich nun aus der Reihe (N.) diese $(1 - \frac{f}{u}) + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} \ldots + \frac{1}{e^{n-1}} = 0$ also, wenn man durchaus mit e^{n-1} multiplicirt, $(1 - \frac{f}{u}) e^{n-1} + e^{n-2} + e^{n-3} + e^{n-4} \ldots + e + 1 = 0$ oder überall durch $1 - \frac{f}{u} = \frac{u-f}{u}$ dividirt, giebt

$$e^{n-1} + \frac{u}{u-s} e^{n-2} + \frac{u}{u-s} e^{n-3} \cdots \cdots + \frac{u}{u-s} e^{2} + \frac{u}{u-s} e + \frac{u}{u-s} = 0$$

eine Gleichung, woraus sich e finden läßt. Auf diese Art hat man also die Auflösungen von allen zehen Aufgaben, die in der Lehre von den geometrischen Progressionen vorkommen können. Unter allen sind die beiden letzten die schwierigsten; um daher ihre Auflösungen um etwas zu erleichtern, will ich noch folgendes beifügen. Man kann annehmen, daß e gewöhnlich nicht kleiner als 2 ist; für diesen Fall nun ist $\sqrt[n-1]{\frac{s}{a}}$ niemals um eine ganze Zahl grösser, als $\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$, nun ist $\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = e$; nimmt man also $\sqrt[n-1]{\frac{s}{a}}$, so hat man eine Zahl, die von e nur um einen Bruch verschieden ist. Dadurch ergiebt sich also ein Mittel, auf eine leichte Art aus a, n, s, eine Zahl zu finden, die von e nur noch um einen Bruch unterschieden ist, und unten a. a. O. wird gezeigt, wie man sich nun dem wahren Werth von e, so viel man will, nähern kann. Eben so läßt sich ein Mittel angeben, aus u, n, s, Zahlen zu finden, die von a und e nur in Brüchen verschieden seyn können, wenn sie nicht die wahren Werthe von a und e selbst darstellen.

Weil nämlich $\frac{s-a}{s-u} = e$, so hat man

$$\frac{s}{s-u} = e + \frac{a}{s-u};$$

Sind also a und e ganze Zahlen, so ergeben sich durch eine einzige arithmetische Operation a und e zugleich. Dividirt man nämlich s durch $s-u$, so kommt zum Quotienten die ganze Zahl e mit einem daran hängenden Bruch heraus, dessen Zähler a, und Nenner der Divisor $s-u$ ist; d. h. wenn man s durch $s-u$ dividirt, so ist die ganze Zahl, die in der Stelle des Quotienten herauskommt, der Werth von e, und die Zahl, welche bei der Division zuletzt übrig bleibt, ist a.

Sind aber a und e keine ganze Zahlen, so giebt die Division den Exponenten e nicht genau, aber doch eine ganze Zahl in der Stelle des Quotienten, die von e nur noch um einen Bruch verschieden ist, und man kann nun dem wahren Werthe von e sich so sehr man will nähern, wie unten gezeigt wird.

Ex. Von der Reihe

3, 12, 48, 192, 768, 3072

sei $a = 3$, $n = 6$, $s = 4095$ gegeben, so giebt $\sqrt[n-1]{\frac{s}{a}} = \sqrt[5]{\frac{4095}{3}} = \sqrt[5]{1365} = 3$, 3 eine Zahl, die von e nur um einen Bruch verschieden ist. Wäre $s = 4095$ und $u = 3072$ gegeben, so

 gäbe

gäbe die Division $\frac{s}{s - u}$ zum Quotienten $4 = e$, und läßt zum Rest $3 = a$, wie die beigefügte Rechnung zeigt.

$$\begin{array}{rcr} s & = & 4095 \\ u & = & 3072 \\ \hline s - u & = & 1023 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 4095 & 4 \\ 1023 & \\ 4092 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

§. 109.

Es läßt sich vermittelst dieser Aufgabe jede gegebene Zahl b durch eine unendliche Reihe ausdrücken. Man kann nämlich b als die gegebene Summe einer solchen Reihe, $u = 0$ als ihr letztes Glied, und jede Zahl, welche man will, als ihr erstes Glied betrachten, und aus diesen drei gegebenen Stücken a, b, u den Exponenten e suchen; man erhält nämlich aus (102. IV. 1.).

$$e = \frac{b - a}{b - u},$$

folglich, da hier $u = 0$ ist,

$$e = \frac{b - a}{b}$$

Ex. Die Zahl 8 durch eine unendliche Reihe auszudrücken, setze man $a = 6$, dieß giebt

$$e = \frac{8 - 6}{8} = \frac{1}{4}$$

also die gesuchte Reihe =

$$6 + 1\tfrac{1}{2} + \tfrac{6}{16} + \tfrac{6}{64} + \tfrac{6}{256} - - - - -$$

§. 110.

§. 110.

Setzt man

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^4} \cdots\cdots = A.$$

$$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{y^6} \cdots\cdots\cdots = C.$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^5} \cdots\cdots\cdots = B.$$

so hat man

$$1.)\ A = B - C$$

Aber $B = \frac{1}{y} + \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{y^6} \cdots\right)$

$$= \frac{1}{y} + \frac{1}{y} \cdot C$$

$$= \frac{1}{y} \cdot (1 + C.)$$

Diesen Werth von B in 1. gesetzt, giebt

$$2.)\ A = \frac{1}{y} \cdot (1 + C) - C$$

Nun ist $C = \frac{1}{y^2 - 1}$ (109.); dieses in 2 gesetzt, giebt

$$3.)\ A = \frac{1 + \frac{1}{y^2 - 1}}{y} - \frac{1}{y^2 - 1}$$

$$= \frac{\frac{y^2 - 1}{y^2 - 1} + \frac{1}{y^2 - 1}}{y} - \frac{1}{y^2 - 1}$$

= y^2

$$= \frac{y^2 - 1 + 1}{y.(y^2-1)} - \frac{1}{y^2-1}$$

$$= \frac{y}{y^2 - 1} - \frac{1}{y^2 - 1}$$

$$= \frac{y - 1}{(y+1).(y-1)}, \text{ weil } y^2 - 1 = (y+1).(y-1),$$

$$= \frac{1}{y+1};$$

§. 111.

$$A + 2\,C = \frac{1}{y+1} + \frac{2}{y^2-1}$$

$$= \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(y+1).(y-1)}$$

$$= \frac{y - 1 + 2}{(y+1).(y-1)}$$

$$= \frac{y+1}{(y+1).(y-1)}$$

$$= \frac{1}{y-1};$$

§. 112.

Es ist $\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^4} \cdots = \frac{1}{y+1}$ (110.) $= \frac{1}{(y+2)-1}$; nun ist $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \cdots$ (109), setzt man in diese Reihe $y + 2$ statt x, so wird

$$\frac{1}{(y+2)-1} = \frac{1}{y+1} = \frac{1}{y+2} + \frac{1}{(y+2)^2}$$

+ 1

$$+ \frac{1}{(y+2)^3} \cdots$$

Oder

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^4} \cdots = \frac{1}{y+2} + \frac{1}{(y+2)^2}$$
$$+ \frac{1}{(y+2)^3} \cdots$$

§. 132.

$$\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.} + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\quad 2.\quad 3.}$$
$$= \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\quad 2.\quad 3.} \cdot \left(\frac{m-3}{4} + 1\right)$$
$$= \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\quad 2.\quad 3.} \cdot \left(\frac{m-3+4}{4}\right)$$
$$= \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\quad 2.\quad 3.} \cdot \left(\frac{m+1}{4}\right)$$
$$= \frac{(m+1).\ m.\ (m-1).\ (m-2)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.};$$

§. 134.

Es wird noch nicht behauptet, daß das bisher wahrgenommene Gesetz ganz allgemein sei, welches auch daraus, daß es die vier ersten Coefficienten gemeinschaftlich beobachten, noch nicht folgt. Kann man aber darthun, daß, wenn das im vorigen §. angegebene Gesetz bei irgend einer Potenz richtig ist, es auch für die nächsthöhere gelte,

gelte, so wird dadurch seine Allgemeinheit bewiesen seyn, weil man alsdann allemal von der niedrigern auf die nächsthöhere schließen kann, wie in 127. 129.

Nun giebt das bisherige Gesetz in Buchstaben ausgedrückt

$$Q = \frac{m.(m-1).(m-2)\;---\;(m-n+1).(m-n)}{1.\;\;2.\;\;3.\;-----\;n.\;\;(n+1)}.$$

Ob dieser Ausdruck in der That allgemein richtig sei, muß die Folge zeigen.

§. 135.

Will man untersuchen, ob, wenn der Ausdruck (134.) für den $n+1$ten Coefficienten irgend einer Potenz m richtig ist, ein eben solcher Ausdruck für den $n+1$ten Coefficienten der $m+1$ten Potenz gelten müsse, so muß man den $n+1$ten Coefficienten der $m+1$ten Potenz nach 123 suchen, und den gefundenen Ausdruck mit dem in 134 vergleichen. Um nun den genannten Coefficienten aus 123 zu finden, muß man erst den nten Coefficienten der mten Potenz suchen; dieser eben so, wie der $n+1$te (134) in Buchstaben nach 133 ausgedruckt, ist =

$$\frac{m.(m-1).(m-2)\;---\;(m-n+2).(m-n+1)}{1.\;\;2.\;\;3.\;-----\;n-1).\;\;n}$$

welcher P. heissen mag. Nun ist 134

Q =

$$Q = \frac{m.(m-1).(m-2)\cdots(m-n+2).(m-n+1).(m-n)}{1.\quad 2.\quad 3.\cdots(n-1).\quad n.\quad (n+1)}$$

also $= P.\left(\frac{m-n}{n+1}\right)$

§. 136.

Der nte Coefficient zu dem n+1ten der Potenz m addirt, giebt den n+1ten Coefficienten der Potenz m + 1 (123); demnach ist der n + 1te Coefficient der m + 1ten Potenz = Q + P $= P.\ \frac{m-n}{n+1} + P = P.\left(\frac{m-n}{n+1} + 1\right) = P.$ $\left(\frac{m-n+n+1}{n+1}\right) = P.\left(\frac{m+1}{n+1}\right)$ oder wenn man den Werth von P aus 135 hier substituirt, so erhält man P + Q =

$$\frac{(m+1).\ m.\ (m-1).(m-2)\cdots(m-n+2).\ (m-n+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4\cdots\quad n.\quad (n+1)}$$

Dieser Ausdruck ist dem (34.) völlig ähnlich. Ist also der (134.) für irgend eine Potenz wahr, so gilt es auch für die nächsthöhere; nun ist er z. B. für die fünfte richtig, folglich auch für die sechste, und nun für die sechste, folglich auch für die siebente u. s. f. wie im folgenden §.

§. 142.

Aus 119 ist das Glied, dessen Coeff. = P ist,
$= Pa^{m-n}b^n$;
das, dessen Coeff. Q ist, oder das nächstfolgende

$$= Q a^{m-n-1} b^{n+1}$$

$$= Q. \frac{a^{m-n} b^n}{a : b}$$

$$= P. \left(\frac{m-n}{n+1}\right). \frac{a^{m-n} b^n}{a : b} \quad (135)$$

Oder $p = P. a^{m-n} b^n. \frac{m-n}{n+1}. \frac{b}{a}$, oder wenn man $P. a^{m-n} b^n = \pi$ setzt, so wird

$$p = \pi. \frac{m-n}{n+1}. \frac{b}{a};$$

Ist z. B. das sechste Glied (in der Bedeutung 121.) der zehnten Potenz $= 210\ a^4 b^6$, so ist das siebente dieser Potenz $= 210\ a^4 b^6. \frac{10-6}{6+1}. \frac{b}{a} = \frac{840}{7} a^3 b^7 = 120\ a^3 b^7$ wie in der Tafel (117.)

§. 150.

Da überhaupt m Coefficienten vorhanden sind, so sind ausser den ersten m − n Coefficienten, noch n Coeff. übrig, folglich ist der m − nte Coefficient vom Anfange zugleich der n + 1te vom Ende gezählt. Nun ist aber

$$\frac{m. (m-1). (m-2) \text{ - - - - } (m-n+1)}{1. \quad 2. \quad 3 \text{ - - - - - - - } n} \quad (\mathfrak{f}.)$$

nicht nur der Ausdruck für den m − nten Coefficienten, sondern auch für den nten oder $= P$; folglich ist $\mathfrak{f}$ ein Ausdruck für den m − nten, nten und n + 1ten Coefficienten vom Ende. Aber

 den

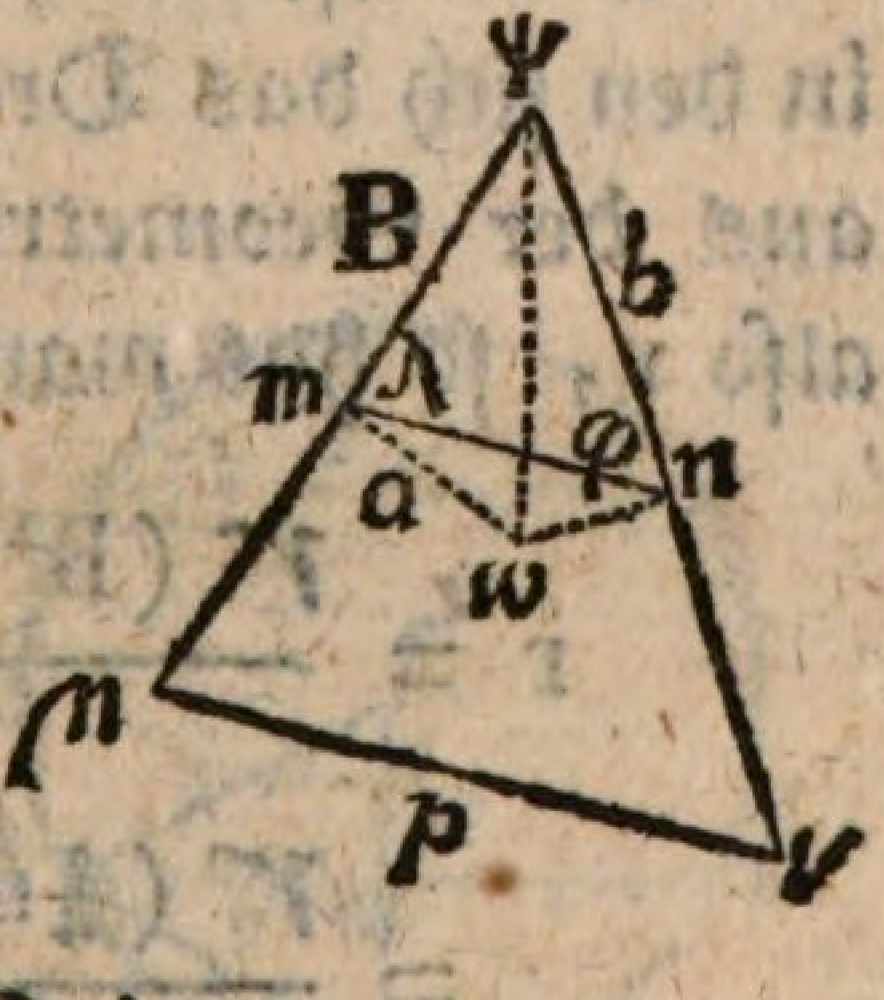
den nten Coeffcienten vom Anfange enthält das $n+1$te Glied, wenn alle Glieder vom Anfange gezählt werden; mithin ist ſ sowohl der Werth vom Coefficienten des $n+1$ten Gliedes vom Anfang genommen, als vom Coefficienten des $n+1$ten Gliedes vom Ende gerechnet.

§. 153.

Diese Aufgabe läßt sich noch allgemeiner so abfassen:

> Die Verhältniß der Seiten eines jeden Dreiecks zu dem Halbmesser des Kreises, in den es sich beschreiben läßt, zu finden;

welche sich auf folgende Art auflösen läßt.



Es sei $\psi m = B = \frac{1}{2}\psi\mu$, $\psi n = b = \frac{1}{2}\psi\nu$, $\omega\psi = d$, $\omega m = a$, $\mu\psi = m$, $\nu\psi = n$, $mn = D$, $mn\omega = p$, $\omega n\psi = \varphi$, $\mu\nu = p$, $\omega m\psi = \lambda$, und $mn\psi = \nu$, weil $\psi m : \psi n = \psi\mu : \psi\nu$, folglich $mn \# \mu\nu$ ist, so hat man aus der Trigon.

$$d = \sqrt{(a^2 + B^2 - 2aB. \operatorname{Cos} \lambda)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{D^2 \sin. p^2}{\sin. \omega^2} + B^2 - \frac{2 B. \operatorname{Cos}. \lambda. D. \sin p}{\sin \omega}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{(D^2. \sin (\varphi-\nu)^2 + B^2. \sin \omega^2 - 2 BD. \sin(\varphi-\nu). (\sin \omega. \operatorname{Cos} \lambda)}}{\sin \omega}$$

also für $\varphi = \lambda = 90^\circ$,

$$d = \frac{r\,(D^2.\ \mathrm{Cos}\,\nu^2 + B^2.\ \sin\psi^2)}{\sin\psi}$$

$$= \frac{r\,(D^2\,(1 - \sin\nu^2) + B^2.\ \sin\psi^2)}{\sin\psi}$$

$$= \frac{r\left(D^2\,(1 - \frac{B^2.\ \sin\psi^2}{D^2}) + B^2.\sin\psi^2\right)}{\sin\psi}$$

$$= \frac{r\,(D^2 - B^2.\ \sin\psi^2 + B^2.\ \sin\psi^2)}{\sin\psi}$$

$$= \frac{D}{\sin\psi} = \frac{r\,(B^2 + b^2 - 2Bb\,\mathrm{Cos}.\,\psi)}{\sin\psi};$$

Nun ist aber d der Halbmesser des Kreises, in den sich das Dreieck $\mu\nu\psi$ verzeichnen läßt, wie aus der Geometrie klar ist; nennt man diesen also r, so hat man

$$r = \frac{r\,(B^2 + b^2 - 2\,Bb.\ \mathrm{Cos}\,\psi)}{\sin.\,\psi}$$

$$= \frac{r\,(\tfrac{1}{4}m^2 + \tfrac{1}{4}n^2 - \tfrac{1}{2}mn\ \mathrm{Cos}\,\psi)}{\sin.\,\psi}$$

$$= \frac{r\,(m^2 + n^2 - 2mn\ \mathrm{Cos}\,\psi)}{2\,\sin\psi}$$

$$= \frac{p}{2.\sin\psi}$$

Nun

Nun ist sin. $\psi =$

$$\frac{\sqrt{(m+n+p).(m+n-p).(m+p-n).(n+p-m)}}{2mn}$$

folglich r =

$$\frac{mnp}{\sqrt{((m+n+p).(m+n-p).(m+p-n).(n+p-m))}};$$

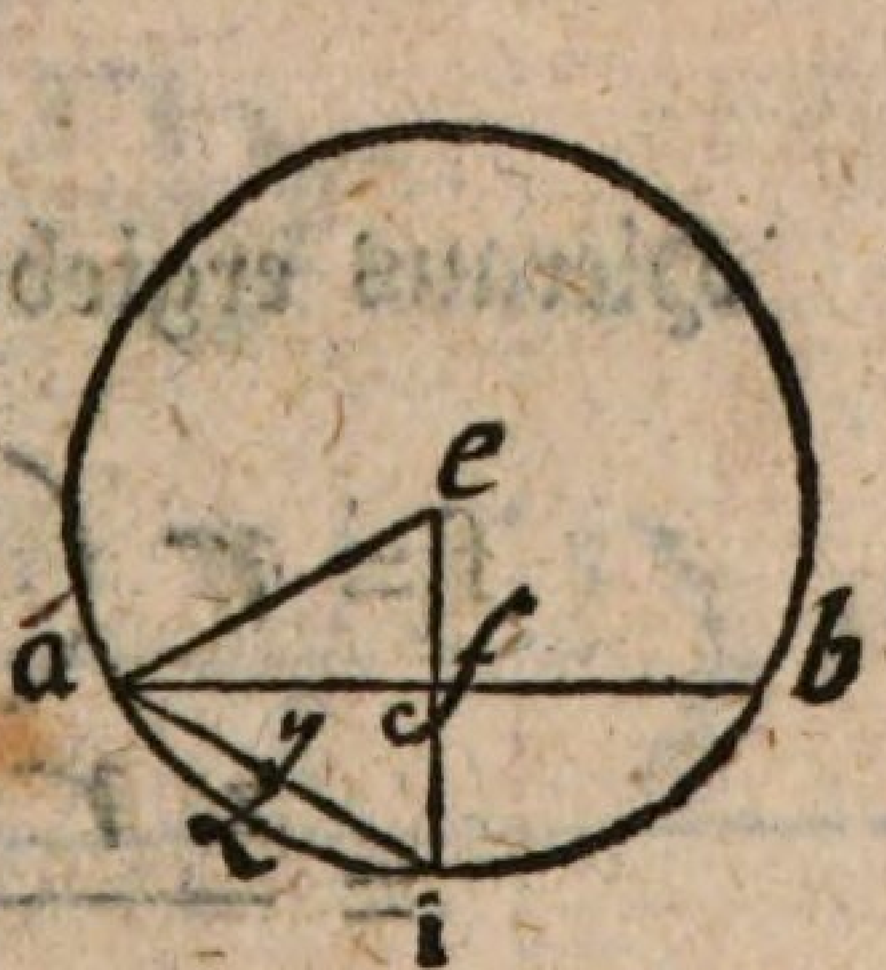
Setzt man hier $m = n = p$, so ergiebt sich für das gleichseitige Dreieck

$$r = \frac{m^3}{\sqrt{(3m.\ m.\ m.\ m)}} = \frac{m^3}{m^2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{m}{\sqrt{3}},\ \text{oder}\ m = r\sqrt{3}$$

welches die Gleichung im Buche ist.

§. 155.



Wenn ab die Seite eines ordentlichen Vielecks, und ai die Seite von einem Vieleck, das doppelt so viel Seiten hat, ist, so sei $ab = f$, $ai = z$, $ei = ea = r$, so ist $z^2 = \frac{1}{4}f^2 + fi^2$; und $z = \sqrt{(\frac{1}{4}f^2 + fi^2)}$;

Nun ist $ef + fi = r$, also $if = r - fe$, und da überdas $ef^2 = ea^2 - af^2 = r^2 - \frac{1}{4}f^2$, so ergiebt sich

$$z = \sqrt{(\tfrac{1}{4}f^2 + fi^2)}$$

$$= \sqrt{(\tfrac{1}{4}f^2 + (r - ef)^2)}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{4} f^2 + \left(r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} f^2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{4} f^2 + r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} f^2} + r^2 - \tfrac{1}{4} f^2}$$
$$= \sqrt{2r^2 - 2r.\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} f^2}} \quad (P.)$$

und wenn man nun umgekehrt f aus z sucht, so erhält man, in P. auf beiden Seiten quadrirt,

$$z^2 = 2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} f^2} \text{ also}$$
$$2r^2 - z^2 = 2r \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4} f^2}$$

und hier auf beiden Seiten quadrirt, giebt

$$4r^4 - 4r^2 z^2 + z^4 = 4r^2. \left(r^2 - \tfrac{1}{4} f^2\right)$$
$$= 4r^4 - r^2 f^2,$$

folglich

$$r^2 f^2 = 4r^4 - 4r^4 + 4r^2 z^2 - z^4$$
$$= 4r^2 z^2 - z^4$$

und
$$f^2 = \frac{4r^2 z^2 - z^4}{r^2}$$
$$= \frac{z^2. (4r^2 - z^2)}{r^2}$$

Hieraus ergiebt sich endlich

$$f = \sqrt{\left(\frac{z^2. (4r^2 - z^2)}{r^2}\right)}$$
$$= \frac{z. \sqrt{4r^2 - z^2}}{r};$$

Es sei z die Seite eines Sechsecks, so ist $z = r$, und man erhält die Seite des Dreiecks $= \frac{r. \sqrt{4 r^2 - r^2}}{r} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r. \sqrt{3}$, wie 153.

§. 159.

Es sei die Seite des Fünfecks = f, und in 155. $z = x = \frac{r\sqrt{5} - 1}{2}$ (158), so ist

$$f^2 = z^2 \left(\frac{4r^2 - z^2}{r^2}\right) \text{ Q.)}$$

Es ist aber

$$z^2 = x^2 = r^2 \left(\frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4}\right)$$

$$= r^2 \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}\right),$$

folglich

$$4r^2 - z^2 = 4r^2 \frac{- 6r^2 + 2r^2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{16r^2 - 6r^2 + 2r^2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}\right) r^2$$

Dieses giebt nun in Q.

$$f^2 = \frac{r^2 . \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}\right) . \left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}\right) . r^2}{r^2}$$

$$= \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}\right) . \left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}\right) r^2$$

$$= \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) . \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right) . r^2$$

$$= \left(\frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}\right) r^2$$

$$= \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}\right) r^2 + \frac{4r^2}{4}$$

$$= x^2 + r^2;$$

oder das Quadrat der Seite des Zehnecks, zu dem Quadrat des Halbmessers addirt, giebt das Quadrat der Seite des Fünfecks. Aus der Gleichung

$$f^2 = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{4} \cdot r^2 \text{ folgt nun}$$

$$f = \frac{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{2} \cdot r \text{ oder auch}$$

$$= r. \sqrt{\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)}$$

also ein irrationaler Ausdruck, dem man sich aber allemal in Rationalzahlen, so sehr man will, nähern kann. Es ist nämlich

$$\sqrt{5} = 2{,}236067977497 \ldots.$$

Dieses für die Wurzel angenommen giebt

$$2\sqrt{5} = 4{,}472135954994$$

und $10 - 2\sqrt{5} = 5{,}27864045006$

also $\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} = 2{,}351141$

wobey man gewiß noch nicht um $\frac{1}{1000000}$ fehlt, daraus erhält man nun

$$f = \frac{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}}{2} \cdot r = \frac{2{,}351141}{2} r$$

$$= 1{,}175570\, r$$

wo

wo der Fehler noch nicht die Hälfte von 0,00001. r beträgt. Weil nun der Winkel am Mittelpunkt im Fünfeck 72° beträgt, so giebt die gefundene Seite des Fünfecks halbirt den sin 36°, und man erhält auf diese Art

$$\sin 36° = 0,587785$$

wo der vorige Fehler aufs Neue halbirt wird.

§. 161.

Oder man kann vermittelst der bisherigen Sätze die Verhältniß des Durchmessers zu den Seiten derjenigen Polygonen finden, die sich in den diesem Durchmesser zugehörigen Kreis beschreiben lassen, wenn ihre Mittelpunktswinkel diese sind:

120°, 60°, 30°, 15° - - - -
90°, 45°, $22\frac{1}{2}$°, $11\frac{1}{4}$° - - -
72°, 36°, 18°, 9° - - - -

Für Mittelpunktswinkel, die in keine dieser drei Reihen fallen, läßt sich aus dem bisherigen die genannte Verhältniß nicht angeben; so ergiebt sich die Verhältniß der Seite des Funfzehnecks zu dem Durchmesser des Kreises, worin es sich verzeichnen läßt, nicht unmittelbar aus den vorigen Sätzen. Es läßt sich aber bewerkstelligen, so bald man weiß, wie sich aus den Sehnen zweener Bogen die Sehne von der Summe dieser Bogen finden läßt, welches in 164. gelehrt wird. Des Funfzehnecks Mittelpunkts-

winkel ist nämlich = 24°; nun giebt das bisherige Verfahren die Seite des 24- und 40Ecks, oder die Sehne von 15° und 9°; sucht man also aus diesen beiden Sehnen der Bogen von 15° und 9° die Sehne von der Summe beider Bogen, so hat man die Sehne von $(15 + 9)^\circ$ oder 24°, also die Seite des Funfzehnecks. Indessen lassen sich doch auch auf diese Art noch nicht aller Polygonen Seiten berechnen, z. B. des 9Ecks, des 11Ecks u. s. f. S. §. 164. und 175.

§. 163.

Aus 19. ist $d = \frac{\mu s - ms}{r}$. Setzt man $s = \frac{1}{2}c$, $6 = Cf$, $\mu = CE$, und $m = \frac{1}{2}k$, so ist

$$d = \frac{CE.\ \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}k.\ Cf}{r};$$

Nun ist aus 163. $\frac{1}{2}k = BE$, mithin

$$d = \frac{CE.\ \frac{1}{2}c - BE.\ Cf}{r};$$

aber BE und CE schließen einen rechten Winkel ein, und ihre Hypothenuse ist $BC = r$, also $CE^2 = r^2 - \frac{1}{4}k^2$, und $CE = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}k^2)}$; in 19. ist $Df = s$ und in (163) $= \frac{1}{2}c$; die Hypothenuse von Df und fc ist $DC = r$, folglich ist $fc^2 = DC^2 - Df^2 = DC^2 - \frac{1}{4}c^2 = r^2 - \frac{1}{4}c^2$, und $fc = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}$. Dieses giebt

$$d = \frac{1}{2}h = \frac{\frac{1}{2}c \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}k^2)} - \frac{1}{2}k \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}}{r}$$

Folglich

$$h = \frac{c \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}k^2)} - k. \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}}{r}$$

$$= \frac{c \sqrt{(4r^2 - k^2)} - k. \sqrt{(4r^2 - c^2)}}{2r}$$

§. 164.

Man darf nur in der vorigen Gleichung überall c und h mit einander verwechseln, so ergiebt sich hier die Gleichung für c; sie läßt sich aber auch unmittelbar aus Trig. 19. S. so herleiten. Es ist sin ACD

$$= \frac{\sin BCA. \cos BCD + \cos BCA. \sin BCD}{r}$$

also $Df = \frac{BE. CG. + CE. DG}{r}$, oder

$$\frac{1}{2}c = \frac{\frac{1}{2}k. CG + \frac{1}{2}h. CE}{r} \quad (Q.)$$

Aber $CG^2 = r^2 - DG^2 = r^2 - \frac{1}{4}h^2$, also
$CG = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}h^2)}$;
Ferner $CE^2 = r^2 - BE^2 = r^2 - \frac{1}{4}k^2$,
mithin $CE = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}k^2)}$.

Diese Werthe von CG und CE in Q gesetzt, giebt

$$\frac{1}{2}c = \frac{\frac{1}{2}k. \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}h^2)} + \frac{1}{2}h \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}k^2)}}{r}$$

also $c = \frac{k.\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}h^2)} + h.\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}k^2)}}{2r}$;

§. 165.

Hier ist

1.) $h.\ (2 + \sqrt{(4 - c^2)}) = c.\sqrt{(4 - h^2)}$

also

2.) $\frac{h.(2 + \sqrt{(4 - c^2)})}{c} = \sqrt{(4 - h^2)}$

weil nun $k = h$, so ist aus 164.

$$c = \frac{h.\sqrt{(4 - h^2)} + h.\sqrt{(4 - h^3)}}{2}$$

$$= \frac{2h.\sqrt{(4 - h^2)}}{2}$$

$$= h.\sqrt{(4 - h^2)}$$

Dieses in dem Nenner No. 2. substituirt giebt

3.) $\frac{h.(2 + \sqrt{(4 - c^2)})}{h.\sqrt{(4 - h^2)}} = \sqrt{(4 - h^2)}$ oder

4.) $\sqrt{(4 - h^2)} = \frac{2 + \sqrt{(4 - c^2)}}{\sqrt{(4 - h^2)}}$, folglich

5.) $\sqrt{(4 - h^2)}.\sqrt{(4 - h^2)} = 2 + \sqrt{(4 - c^2)}$

oder $4 - h^2 = 2 + \sqrt{(4 - c^2)}$

Aus No. 1. ist ferner

6.) $h = \frac{c.\sqrt{(4 - h^2)}}{2 + \sqrt{(4 - c^2)}}$, demnach

7.) $h^2 = \frac{c^2(4 - h^2)}{(2 + \sqrt{(4 - c^2)}).(2 + \sqrt{(4 - c^2)})}$

Nun

Nun ist aus No. 5. $4 - h^2 = 2 + \surd(4 - c^2)$,

also $\frac{4 - h^2}{2 + \surd(4 - c^2)} = 1$; dieses in 7. substi-
tuirt giebt

$$8.)\ h^2 = \frac{c^2}{2 \pm \surd(4 - c^2)}$$

§. 167.

Aus 166. ist $c = h.\ \surd(4 - h^2)$, mithin

$$c^2 = h^2.\ (4 - h^2)$$
$$= 4h^2 - h^4;$$

man setze nun in 78. $z^2 = h^4$, $p = 4$, $q = -c^2$, so giebt sich daselbst aus L der Werth von h^2; es ist nämlich

$$c^2 = 4h^2 - h^4 \text{ oder}$$
$$h^4 - 4h^2 = -c^2$$

also $$h^4 - 4h^2 + 4 = 4 - c^2$$

und auf beiden Seiten die Wurzel gezogen, giebt

$$h^2 - 2 = \surd(4 - c^2)$$

und $$h^2 = 2 \pm \surd(4 - c^2)$$

Für $\omega < \frac{1}{2}P$ ist $\frac{1}{2}P - \omega$ was bejahtes, also $\frac{1}{2}P + (\frac{1}{2}P - \omega) > \frac{1}{2}P$ oder $P - \omega > \frac{1}{2}P$;

Dieß giebt

$\frac{1}{2}(P - \omega) > \frac{1}{4}P$; oder $\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}\omega > \frac{1}{4}P$.

§. 169.

Daraus, daß $\frac{c^2}{2 \pm \sqrt{(4 - c^2)}} = 2 \pm \sqrt{(4 - c^2)}$ müßte folgen, daß

$$c^2 = (2 \pm \sqrt{(4 - c^2)})^2$$

also $c = 2 \pm \sqrt{(4 - c^2)}$ wäre.

Aber dieß gäbe

$$c^2 - 4c + 4 = 4 - c^2,$$

also $2c^2 - 4c = 0$

und daher $c = 2$:

Diese Ungereimtheit, daß c allemal die 2 seyn soll, zu heben, muß man folgendes bedenken. Es ist an sich betrachtet wahr, daß aus 165. h^2 den doppelten Werth $\frac{c^2}{2 \pm \sqrt{(4 - c^2)}}$ und aus 167. den doppelten $2 \pm \sqrt{(4 - c^2)}$ hat; nur ist es falsch, daß wann (165.) $h^2 = \frac{c^2}{2 + \sqrt{(4 - c^2)}}$, auch in 167. $h^2 = 2 + \sqrt{(4 - c^2)}$ seyn müsse; und umgekehrt, daß man für $h^2 = \frac{c^2}{2 - \sqrt{(4 - c^2)}}$ in 165. auch $h^2 = 2 - \sqrt{(4 - c^2)}$ in 167. habe Das heißt, wenn man gehörige Rücksicht auf die Zeichen nimmt, so ist nicht

$$\frac{c^2}{2 \pm \sqrt{(4 - c^2)}} = 2 \pm \sqrt{(4 - c^2)}$$

sondern

sondern $\frac{c^2}{2 \pm \surd(4-c^2)} = 2 \mp \surd(4-c^2)$

oder $\frac{c^2}{2 \mp \surd(4-c^2)} = 2 \pm \surd(4-c^2)$

wie aus folgender Rechnung klar ist. Wenn man in 165. in dem Werth von h^2 vor dem $\surd$ wie gehörig das zweideutige Zeichen $\pm$ setzt, so hat man $h^2 = \frac{c^2}{2 \pm \surd(4-c^2)}$, multiplicirt man nun hier Zähler und Nenner mit $2 \mp \surd(4-c^2)$, so ergiebt sich

$$h^2 = \frac{c^2}{2 \pm \surd(4-c^2)}$$

$$= \frac{2c^2 \mp c^2\surd(4-c^2)}{4 \mp 2\surd(4-c^2) \pm 2\surd(4-c^2) - 4 + c^2}$$

$$= \frac{2c^2 \mp c^2\surd(4-c^2)}{c^2} \text{ oder}$$

$$h^2 = 2 \mp \surd(4-c^2)$$

hieraus den Werth von c gesucht, giebt

$$c^2 = (2 \pm \surd(4-c^2)) \cdot (2 \mp \surd(4-c^2))$$

$$= 4 - 4 + c^2$$

oder $c^2 = c^2$, welches richtig ist.

§. 175.

Für zweene Winkel α, β, ist

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha . \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha . \sin\beta$$

$$\operatorname{Cos}(\alpha+\beta) = \operatorname{Cos}\alpha . \operatorname{Cos}\beta - \sin\alpha . \sin\beta$$

also

also für $\alpha = \beta$.

$$\sin 2\alpha = \sin\alpha.\ \text{Cos}\,\alpha. + \text{Cos}\,\alpha \sin\alpha$$
$$= 2.\ \sin\alpha.\ \text{Cos}\,\alpha;$$

und
$$\text{Cos}\,2\alpha = \text{Cos}\,\alpha.\ \text{Cos}\,\alpha - \sin\alpha.\ \sin\alpha$$
$$= \text{Cos}\,\alpha^2 - \sin\alpha^2$$

oder für $\sin\alpha = a$, $\text{Cos}\,\alpha = b$, wird

I.) $\sin 2\alpha = 2ab$
$\text{Cos}\,2\alpha = b^2 - a^2$;

Ferner
$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha)$$
$$= \sin 2\alpha.\ \text{Cos}\,\alpha + \text{Cos}\,2\alpha.\ \sin\alpha$$
$$= 2ab^2 + a(b^2 - a^2)$$
$$= 3ab^2 - a^3;$$
$$\text{Cos}\,3\alpha = \text{Cos}\,(2\alpha + \alpha)$$
$$= \text{Cos}\,2\alpha.\ \text{Cos}\,\alpha - \sin 2\alpha.\ \sin\alpha$$
$$= (b^2 - a^2)\,b - 2ab.\ a$$
$$= b^3 - 3a^2b$$

Also

II.) $\sin 3\alpha = 3ab^2 - a^3$
$\text{Cos}\,3\alpha = b^3 - 3a^2b$

Eben so
$$\sin 4\alpha = \sin(3\alpha + \alpha)$$
$$= \sin 3\alpha.\ \text{Cos}\,\alpha + \text{Cos}\,3\alpha \sin\alpha$$
$$= (3ab^2 - a^3).\ b + (b^3 - 3a^2b).\ a$$
$$= 4ab^3 - 4a^3b$$
$$\text{Cos}\,4\alpha = \text{Cos.}\,(3\alpha + \alpha)$$
$$= \text{Cos}\,3\alpha.\ \text{Cos}\,\alpha - \sin 3\alpha.\ \sin\alpha$$
$$= (b^3 - 3a^2b).\ b - (3ab^2 - a^3).\ a$$
$$= b^4 - 6a^2b^2 + a^4$$

Mithin

Mithin III.) $\sin 4\alpha = 4ab^3 - 4a^3b$

$$\mathrm{Cos}\ 4\alpha = b^4 - 6a^2b^2 - a^4$$

Auf diese Art lassen sich zwar nach der Ordnung die Sinus und Cosinus der vielfachen Winkel finden, aber die folgenden zu finden, ohne allemal zuvor die vorhergehenden berechnet zu haben, geht auf die nur erwähnte Art nicht an. Hierzu müßte man erst ein allgemeines Gesetz entdecken, nach welchem die Glieder in den Werthen für die Sinus und Cosinus der vielfachen Winkel auf einander folgen. Die Folge wird zeigen, daß es in der That ein solches allgemeines Gesetz gebe.

§. 177.

Eine Anwendung hiervon wäre, die Seite des IXecks zu finden. Es ist nämlich

$$\sin 3\alpha = 3.\ \sin\alpha.\ \mathrm{Cos}\,\alpha^2 - \sin\alpha^3$$
$$= 3.\ \sin\alpha.(1 - \sin\alpha^2) - \sin\alpha^3$$
$$= 3.\ \sin\alpha - 4.\ \sin\alpha^3$$

also hat man für $\frac{\sin 3\alpha}{4} = c$,

$$\sin\alpha^3 - \tfrac{3}{4}\sin\alpha + c = 0$$

Diese Gleichung giebt aus dem Sinus eines Winkels den Sinus des dritten Theils desselben. Nun ist aus 154. $\sin 60° = 0{,}8660254$, daraus findet man also $\sin\frac{60°}{3} = \sin 20° =$ der halben Sehne 40° durch diese Gleichung

sin.

$$\sin. \alpha^3 - \tfrac{3}{4} \sin. \alpha + 0,2165063 = 0$$

wie weiter unten gezeigt wird; der Werth der unbekannten Größe, den man aus dieser Gleichung findet, verdoppelt, giebt die Seite des IXecks, als die Sehne 40°.

§. 182.

I. Wenn man ein rechtwinklichtes Dreieck angeben soll, das eine gegebene Hypothenuse haben soll, so lassen sich offenbar verschiedene Auflösungen finden, weil zu Bestimmung eines rechtwinklichten Dreiecks außer dem rechten Winkel noch zwei Stücke erfodert werden. Sie gehört daher unter die unbestimmten Aufgaben. Sie aufzulösen, setze man die gegebene Hypothenuse $= a$, die beiden übrigen Seiten heiße man x, y, so folgt aus dem Pythagorischen Lehrsatz $a^2 = x^2 + y^2$, folglich

$$y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$$

Ist $x > a$, so wird $\sqrt{(a^2 - x^2)} = y$ unmöglich, oder die Aufgabe wäre für den Fall keiner Auflösung fähig.

II.) Ein Dreieck zu finden, dessen Grundlinie und Inhalt gegeben ist, setze man die Grundlinie $= a$, den Inhalt $= b$, seine Höhe $= x$, so ist $\frac{ax}{2} = b$, folglich $\frac{2b}{a} = x$. Setzt man nun auf irgend einen Punkt von a ein Perpendikel =

$=\frac{2b}{a}$, so liegen alsdann zu beiden Seiten desselben die Theile von a, davon der eine $= a - y$, wenn der andere y heißt. Folglich wird die eine auf a stehende Seite des gesuchten Dreiecks $= \sqrt{\left((a-y)^2 + \frac{4b^2}{a^2}\right)}$, die andere $= \sqrt{\left(y^2 + \frac{4b^2}{a^2}\right)}$; nennt man also die eine Seite p, die andere q, so wird

$$p = \sqrt{((a-y)^2 + 4b^2 : a^2)}$$
$$q = \sqrt{(y^2 + 4b^2 : a^2)}$$

wo y jedes nach Willkühr auf a angenommene Stück vorstellt.

§. 184.

Aus $ax^2 + bx + c = 0$ folgt

$$ax^2 = -bx - c$$

also $$x^2 = -\frac{bx}{a} - \frac{c}{a};$$

Nun setze man in 78. $x^2 = z^2$, $-\frac{bx}{a} = pz$, $-\frac{c}{a} = q$, so erhält man

$$x = \frac{-\frac{1}{2}b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}b^2}{a^2} - \frac{c}{a}\right)}$$
$$= \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)};$$

Beide Brüche unter dem r unter eine Benennung gebracht, giebt

$$x = -\frac{b}{2a} \pm r\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}\right)$$

$$= \frac{-b \pm r(b^2 - 4ac)}{2a}$$

Weil ferner $-4ac = -2bu + u^2$, also $2bu = 4ac + u^2$, so ist $\frac{4ac + u^2}{2u} = b$, folglich $b - u = \frac{4ac + u^2 - 2u^2}{2u} = \frac{4ac - u^2}{2u}$

Weil nun ferner

$$x = \frac{-b \pm r(b^2 - 4ac)}{2a} \quad R.)$$

wo der Werth von x zweifach ist, so ist für das obere Zeichen

$$x = \frac{-b + r(b^2 - 4ac)}{2a}$$

da also $r(b^2 - 4ac) = b - u$, mithin $-u = -b + r(b^2 - 4ac)$, so ist

$$\frac{-b + r(b^2 - 4ac)}{2a} = -\frac{u}{2a} = x;$$

Für das untere Zeichen in R erhält man

$$x = \frac{-b - r(b^2 - 4ac)}{2a}$$

=

$$= \frac{-u^2 - 4ac - (4ac - 4u^2)}{4au}$$

$$= -\frac{8ac : 4a}{4au : 4a}$$

$$= \frac{-2c}{u}$$

Man kann die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ auch auf folgende Art auflösen.

Man hat $x^2 = \frac{-b}{a}x - \frac{c}{a}$ P.)

$$x = -\frac{y}{a} - \frac{b}{2a} \text{ Q.)}$$

so giebt sich

$$1.)\ x^2 = \frac{y^2}{a^2} + \frac{by}{a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Den Werth von x aus Q in P substituirt, giebt

$$2.)\ x^2 = -\frac{c}{a} - \frac{b}{a}.\left(-\frac{y}{a} - \frac{b}{2a}\right);$$

und nun erhält man aus 1. und 2.

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{by}{a^2} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{by}{a^2} + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{a}$$

oder $\frac{y^2}{a^2} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{a}$

und $\frac{y^2}{a^2} = \frac{b^2}{2a^2} - \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

$$= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

also $$\frac{y}{a} = \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Dieses in Q gesetzt, giebt

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Indessen ist das vorige Verfahren weit kürzer, als dieses, und daher zum wirklichen Gebrauch dem letztern vorzuziehen.

Da dergleichen Aufgaben, die auf quadratische Gleichungen führen, sehr häufig vorkommen, so will ich noch einiges darüber anmerken.

Man kommt oft auf Fälle, da nur verlangt wird, man soll x so bestimmen, daß $a + bx + cx^2$ ein Quadrat werde, ohne zu bestimmen, wie groß $a + bx + cx^2$ seyn soll. Auf einen solchen Fall wäre man geführt, wenn man z. B. eine Zahl von der Art suchte, daß ein Product aus ihr in 6. nebst dem Product aus ihrem Quadrat in 8. zu 12. addirt eine Quadratzahl sein sollte; hier wäre nämlich

$$12 + 6x + 8x^2 = y^2;$$

dergleichen Fragen allgemein aufzulösen, verfahre man auf folgende Art. Man unterscheide diese vier Fälle

1.) Wenn

1.) Wenn $c = f^2$ oder ein Quadrat ist,
2.) —— $a = f^2$
3.) —— c und a Quadrate sind
4.) —— c und a jede andere Zahl vorstellen können.

I.) Es sei also in der Formel $a + bx + cx^2$ c eine Quadratzahl f^2, so läßt sich allemal annehmen

$$\sqrt{(a + bx + f^2x^2)} = fx + \frac{m}{n}$$

und hieraus folgt

$$a + bx + f^2x^2 = f^2x^2 + 2mfx : n + \frac{m^2}{n^2},$$

oder $a + bx = 2mfx : n + \dfrac{m^2}{n^2}$

$$= \frac{2mnfx + m^2}{n^2}$$

mithin $an^2 + bn^2x = 2mnfx + m^2$
und $an^2 - m^2 = (2mnf - bn^2)\,x$
Dieß giebt

$$x = \frac{an^2 - m^2}{2mnf - bn^2}$$

oder auch $= \dfrac{m^2 - an^2}{bn^2 - 2mnf}$

Ex. Eine Zahl von der Art zu finden, daß ein Product aus ihr in 3, nebst dem Product aus ihrem Quadrat in 4, zu 2 addirt eine Quadratzahl giebt.

Hier ist a = 2, b = 3, f = 2; nimmt man also m und n willkührlich an z. B. m = 2, n = 3, so erhält man

$$x = \frac{2.\,9 - 4}{2.\,2.\,3.\,2 - 3.\,9} = -\tfrac{14}{3}$$

also $2 + 3x + 4x^2 = 2 - 14 + 87\tfrac{1}{9}$
$= 75\tfrac{1}{9}$;

wo $75\frac{1}{9}$ eine Quadratzahl ist, wie man ohne langweiliges Probiren so finden kann. Man verwandle $75\frac{1}{9}$ in einen Decimalbruch, so ergiebt sich $75\frac{1}{9} = 75,11111$ - - - -, und hieraus die Wurzel gezogen, giebt $8,66666$ - - - - $= 8 + \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000}$ - - - -; in dieser geometrischen Reihe ist das erste Glied $= \frac{6}{10}$, der Exponent $= \frac{1}{10}$, und das letzte Glied = 0. Aus diesen Dingen suche man nach (§. 102. II. 2.) der Reihe Summe, so erhält man

$$0,66666 \text{ - - - -} = \frac{\frac{6}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

daß also $\sqrt{}(75,1111$ - - - -$) = 8\frac{2}{3} = \sqrt{}(75\frac{1}{9})$, folglich $2 + 3x + 4x^2$ für $x = -\frac{14}{3}$ eine Quadratzahl ist.

II.) Für $a = f^2$ erhält man die Formel $cx^2 + bx + f^2$, und man kann wieder annehmen

$$\sqrt{}(cx^2 + bx + f^2) = f + \frac{m}{n}x$$

Hieraus folgt $cx^2 + bx = \frac{m^2}{n^2}x^2 + \frac{2\,mf}{n}x$

oder

oder $cx + b = \frac{m^2}{n^2} x + \frac{2mf}{n}$

folglich $x = \frac{2mnf - n^2 b}{n^2 c - m^2}$

III.) Es seien a und c Quadratzahlen, so entsteht diese Formel $f^2 + bx + g^2 x^2$

Man setze nun

$$\sqrt{(f^2 + bx + g^2 x^2)} = \frac{f}{m} + gx$$

welches angeht, weil m ganz unbestimmt ist, so erhält man

$$f^2 + bx + g^2 x^2 = \frac{f^2}{m^2} + \frac{2fg}{m} x + g^2 x^2$$

oder $f^2 + bx = \frac{f^2}{m^2} + \frac{2fg}{m} x$

$$= \frac{f^2 + 2fgmx}{m^2}$$

folglich $m^2 f^2 + bm^2 x = f^2 + 2fgmx$

und daher $x = \frac{f^2 (m^2 - 1)}{m. (2fg - bm)}$

IV.) Es seyen weder c noch a Quadrate, oder die Formel habe diese Gestalt $ax^2 + bx + c = y^2$, so kann man beinahe auf eine ähnliche Art verfahren; nur erhält man keinen so brauchbaren Ausdruck für x, weswegen ich diesen Fall ganz übergehe.

In dem bisherigen ist blos untersucht worden, wie x beschaffen seyn müsse, damit $ax^2 + bx + c$ ein Quadrat werde, ohne darauf zu sehen, daß man x in ganzen Zahlen erhalte. Hierzu werden wieder besondere Kunstgriffe erfodert, die ich nur in der Kürze berühren will, und da sich jede vollständige quadratische Gleichung, wie unten gezeigt wird, in eine andre verwandlen läßt, in der die erste Potenz der unbekannten Größe fehlt, so darf man nur diese Formel $ax^2 + b$ betrachten. Stellt also y irgend eine ganze Zahl vor, so soll $ax^2 + b = y^2$ seyn. Man nehme an, es sei schon irgend ein Beispiel bekannt, da $af^2 + b = g^2$, so hat man $y^2 - ax^2 = g^2 - af^2$. Man setze ferner, es sei schon eine solche Zahl für n bekannt, daß $an^2 + 1 = m^2$ werde; aus dieser Gleichung $an^2 + 1 = m^2$ folgt weiter $m^2 - an^2 = 1$; hiermit $g^2 - af^2$ multiplicirt, giebt

$$y^2 - ax^2 = (g^2 - af^2) . (m^2 - an^2)$$

oder $y^2 - ax^2 = g^2m^2 - af^2m^2 - ag^2n^2 + a^2f^2n^2$

Weil nun in der Gleichung $ax^2 + b = y^2$, y unbestimmt ist, so setze man

$$y = gm + afn,$$

dieses statt y in Q gesetzt, giebt

$$g^2m^2 + 2afgmn + a^2f^2n^2 - ax^2 = g^2m^2 - af^2m^2 - ag^2n^2 + a^2f^2n^2$$

oder

$$2afgmn - ax^2 = - af^2m^2 - ag^2n^2,$$

folglich

folglich $ax^2 = af^2m^2 + ag^2n^2 + 2afgmn$,
oder $x^2 = f^2m^2 + g^2n^2 + 2fgmn$,
und daher $x = fm + gn$

Ex. Man weiß, daß $3 . 3^2 + 9 = 6^2$;
ferner, daß $3 . 4^2 + 1 = 7^2$;
Dieses sind nämlich zwei Beispiele, da

1.) $af^2 + b = g^2$;
2.) $an^2 + 1 = m^2$;

wo also $a = 3$, $b = 9$, $f = 3$, $g = 6$, $m = 7$ und $n = 4$ ist.

Soll $ax^2 + b$ oder $3x^2 + 9$ ein Quadrat in ganzen Zahlen werden, so ist

$$x = fm + gn$$
$$= 3 . 7 + 6 . 4 = 45$$

und $x^2 = 45^2 = 2025$
$ax^2 = 3 . 2025 = 6075$
und $ax^2 + b = 6075 + 9 = 6084$. welches das Quadrat von 78. ist.

Offenbar kommt es hierbei vorzüglich darauf an, allemal solche Zahlen zu finden, die in der Formel

$$an^2 + 1 = m^2$$

begriffen sind. Dergleichen Zahlen lassen sich nun leicht berechnen; man findet eine solche Tabelle, die für jeden Werth von a die kleinste Zahlen m und n angiebt, so daß $an^2 + 1 = m^2$ in Eul. vollst. Anl. Cap. 7. II. Abschn. II. Th. Man kann von dem bisherigen überhaupt Eulers vollst. Anl. zur Algeb. weiter nachlesen.

§. 185.

In der Gleichung $-x^2 = -2pzx + x^2p^2$ durchaus mit x dividirt, giebt

$$-x = -2pz + xp^2$$

also $x + xp^2 = 2pz$;

und $x = \frac{2pz}{1+p^2}$.

Es ist ferner

$$y = z - px$$

$$= z - \frac{p.\ 2pz}{1+p^2}$$

$$= \frac{z + p^2z - 2p^2z}{1+p^2}$$

$$= \frac{z - p^2z}{1+p^2}$$

oder $y = \frac{1-p^2}{1+p^2}z$

§. 186.

Aus $u^2 + 2uy + y^2 = x^2 + y^2$

oder $u^2 + 2uy = x^2$

folgt $2uy = x^2 - u^2$

und $y = \frac{x^2 - u^2}{2u}$;

Diesen Werth von y in der Gleichung $z = u + y$ substituirt, giebt

$$z = u + \frac{x^2 - u^2}{2u}$$

$$= \frac{2u^2 + x^2 - u^2}{2u}$$

$$= \frac{u^2 + x^2}{2u}$$

Die beiden Aufgaben (185. 186.) lassen sich noch auf eine andere Art auflösen. Da nämlich bei einem rechtwinklichten Dreieck die Quadrate der beiden Catheten zusammengenommen dem Quadrat der Hypothenuse gleich sind, man hätte die Seiten eines rechtwinklichten Dreiecks in Zahlen zu suchen. Man kann dabei die Hypothenuse = 1 setzen, und die Catheten hiernach bestimmen. Heißen demnach die Catheten x, y, so ist

$$1 - x^2 = y^2 \quad N.)$$

Nun setze man $\sqrt{(1 - x^2)} = 1 + \frac{m}{n} x$, wie verstattet ist, weil m und n jede Zahl auch positive und negative bedeuten können, so erhält man

$$x^2 = \frac{-2mx}{n} - \frac{m^2x^2}{n^2}$$

also $n^2x^2 = -2mnx - m^2x^2$

oder überall mit x dividirt,

$$n^2x = -2mn - m^2x$$

und

und dieses giebt

$$x = \frac{-2mn}{n^2+m^2};$$

dieses in N.) substituirt, bringt

$$y^2 = 1 - \frac{4m^2n^2}{n^4+2m^2n^2+m^4}$$

$$= \frac{n^4+2m^2n^2+m^4-4m^2n^2}{n^4+2m^2n^2+m^4}$$

$$= \frac{n^4+m^4-2m^2n^2}{(n^2+m^2)^2}$$

$$= \left(\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}\right)^2$$

daß also

$$1 - \frac{4m^2n^2}{n^4+2m^2n^2+m^4} = \left(\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}\right)$$

oder

$$1 - \frac{(2mn)^2}{(n^2+m^2)^2} = \left(\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}\right)^2$$

oder

$$\frac{(n^2+m^2)^2-(2mn)^2}{(n^2+m^2)^2} = \frac{(n^2-m^2)^2}{(n^2+m^2)^2}$$

folglich

1.) $(n^2+m^2)^2-(2mn)^2 = (n^2-m^2)^2$

2.) $(n^2-m^2)^2+(2mn)^2 = (n^2+m^2)^2$;

Sucht man demnach zwo Zahlen, deren Quadrate zusammen addirt wieder ein Quadrat ausmachen, so setze man in 2. $x = n^2 - m^2$,

$y =$

$y = 2mn$, so wird $x^2 + y^2 = (n^2 + m^2)^2$ also ein Quadrat, was auch m und n für Zahlen sind.

Ex. Es sei $m = 2$, $n = 3$, so ist

$$x = n^2 - m^2 = 9 - 4 = 5$$
$$y = 2mn = 2.\ 2.\ 3 = 12.$$

und es wird

$$x^2 + y^2 = 25 + 144 = 169$$

welches das Quadrat von 13. ist.

Ist $m = 3$, $n = 2$, so ist

$$x = 4 - 9 = -5$$
$$y = 12,$$

und $$x^2 + y^2 = 25 + 144 = 169$$

wie vorhin. Und eben so wird aus 1. für $x = n^2 + m^2$ und $y = 2mn$, allemal $x^2 - y^2$ ein Quadrat.

Ex. Es sei $m = 5$, $n = 10$, so setze man

$$x = n^2 + m^2 = 100 + 25 = 125$$
$$y = 2mn = 2.\ 5.\ 10 = 100$$

Dieß giebt $$x^2 - y^2 = 15625 - 10000 = 5625$$

welches das Quadrat von 75 ist.

§. 190.

Ich will hier nur eine Aufgabe berühren, weil man daraus ersehen wird, wie man bei ähnlichen Fällen verfahren müsse.

„Irgend eine Zahl, als 50, in zwei
„Theile zu theilen, wovon der eine z. B.
„durch 2, der andere durch 7. theilbar sei.

Aufl.

Aufl. Der erste Theil heisse φ, der andere ψ, so ist, wenn x, y, ganze Zahlen vorstellen,

$$\frac{\varphi}{2} = x; \quad \frac{\psi}{7} = y;$$

mithin $\varphi = 2x; \quad \psi = 7y;$

und $\varphi + \psi = 50 = 2x + 7y;$

Hieraus wird

$$x = \frac{50 - 7y}{2} \quad Q.)$$

Weil nun x und y ganze bejahte Zahlen seyn sollen, so folgt aus Q. daß $7y$ nicht grösser als 50. sein darf, folglich $y < 8$ seyn muß. Da ferner $\frac{50 - 7y}{2} = 25 - \frac{7y}{2}$, so folgt weiter

$$x = 25 - \frac{7y}{2}$$

oder $x = 25 - 3y - \frac{1}{2}y \quad R.)$

Da x eine ganze Zahl ist, so folgt aus R, daß auch $25 - 3y - \frac{1}{2}y$ eine ganze Zahl ist; aber $25 - 3y$ ist eine ganze Zahl, dieserwegen muß auch $\frac{1}{2}y$ eine ganze Zahl, mithin y durch 2 theilbar seyn. Nun ist $y < 8$; man darf also nur alle grade Zahlen von 0. bis 6. nehmen, um die Werthe von y zu erhalten, und zugleich die von x dadurch zu bestimmen. Es ergiebt sich hieraus für

y = 0.	2.	4.	6.
x = 25.	18.	11.	4.

folglich

folglich die gesuchten Theile von 50. folgende

ψ = 0.	14.	28.	42.
ϕ = 50.	36.	22.	8.

wo jede der obern Zahlen durch 7, jede der untern durch 2 theilbar ist, und zwei über einander stehende zusammen allemal die 50. ausmachen. So ist $\frac{28}{7}$ eine ganze Zahl, $\frac{22}{2}$ eine ganze Zahl, und 28 + 22 = 50.

§. 199.

Man soll aus den Gleichungen

H.) $y^7 = a^6x$

K.) $y^3 = axy - b^3$

die y wegschaffen. Da $y^7 = y^3 . y^4 = (axy - b^3) . y^4 = axy^5 - b^3y^4$, und überdas $y^7 = a^6x$, so ist

$$a^6x = axy^5 - b^3y^4,$$

also $$\frac{a^6x + b^3y^4}{ax} = y^5 \text{ d. i.}$$

$$\text{L.)}\ a^5 + \frac{b^3}{ax}y^4 = y^5;$$

Wären nun K, L, gleich hoch, so könnte man nur nach 196. verfahren; man würde alsdann eine neue Gleichung erhalten, die wenigstens um einen Grad niedriger wäre, als eine von beiden K, L; aber K und L sind nicht von einerlei Grad; um also doch eine Gleichung zu erhalten, die wenigstens um einen Grad geringer ist, als eine der genannten, so bediene man sich

des

des Verfahrens (197.), daß man nämlich aus den beiden Gleichungen K, L, eine dritte suche, in der die höchste Potenz von y wenigstens um einen Grad niedriger sei, als in L der höchsten von beiden. Man setze also statt y^5, $y^3 . y^2$, und substituire aus K für y^3, $axy - b^3$, so erhält man

$$y^5 = (axy - b^3)\, y^2$$
$$= axy^3 - b^3y^2$$

und aus L den Werth von y^5 substituirt, giebt

$$a^5 + \frac{b^3}{ax}\, y^4 = axy^3 - b^3y^2$$

folglich

$$\frac{b^3}{ax} . y^4 = axy^3 - b^3y^2 - a^5$$

und
$$y^4 = \frac{a^2x^2y^3}{b^3} - \frac{axb^3}{b^3}\, y^2 - \frac{a^6x}{b^3}$$

oder

$$M.)\ y^4 = \frac{a^2x^2y^3}{b^3} - axy^2 - \frac{a^6x}{b^3} = y^3 . y;$$

Man setze nun in M den Werth von y^3 aus K, so kommt

$$y^4 = (axy - b^3) .\ y$$
$$= axy^2 - b^3y$$

Auch diesen Werth von y^4 in M substituirt, giebt

$$axy^2 - b^3y = \frac{a^2x^2y^3}{b^3} - axy^2 - \frac{a^6x}{b^3}$$

Hieraus

Hieraus folgt

$$axy^2 - b^3y + axy^2 + \frac{a^6x}{b^3} = \frac{a^2x^2y^3}{b^3}$$

und $$y^3 = \frac{ab^3xy^2 - b^6y + ab^3xy^2 + (a^6xb^3) : b^3}{a^2x^2}$$

$$= \frac{b^3}{ax}y^2 - \frac{b^6}{a^2x^2}y + \frac{b^3}{ax}y^2 + \frac{a^4}{x},$$

oder

$$N.)\ y^3 = \frac{2b^3}{ax}y^2 - \frac{b^6}{a^2x^2}y + \frac{a^4}{x};$$

Hier statt y^3 ihren Werth aus K. gesetzt, giebt

$$axy - b^3 = \frac{2b^3}{ax}y^2 - \frac{b^6}{a^2x^2}y + \frac{a^4}{x},$$

demnach

$$axy - b^3 + \frac{b^6}{a^2x^2}y - \frac{a^4}{x} = \frac{2b^3}{ax}y^2;$$

und

$$\frac{a^2x^2}{2b^3}y - \frac{ax}{2} + \frac{b^3}{2ax}y - \frac{a^5}{2b^3} = y^2$$

oder

$$y^2 = \frac{a^3x^3y}{2axb^3} + \frac{b^6y}{2axb^3} - \frac{axb^3}{2b^3} - \frac{a^5}{2b^3}$$

oder

$$O.)\ y^2 = \left(\frac{a^3x^3 + b^6}{2axb^3}\right)y - \left(\frac{axb^3 + a^5}{2b^3}\right)$$

Dieses giebt

$$y^3 = y^2 . y = \left(\frac{a^3x^3 + b^6}{2axb^3}\right) y^2 - \left(\frac{axb^3 + a^5}{2b^3}\right) y;$$

welches statt y^3 in K gesetzt, folgende Gleichung giebt

$$axy - b^3 = \left(\frac{a^3x^3 + b^6}{2axb^3}\right) y^2 - \left(\frac{axb^3 + a^5}{2b^3}\right) y$$

und hieraus folgt

$$axy - b^3 + \left(\frac{axb^3 + a^5}{2b^3}\right) y = \left(\frac{a^3x^3 + b^6}{2axb^3}\right) . y^2$$

oder

$$\left(\frac{2axb^3 + axb^3 + a^5}{2b^3}\right) y - b^3 = \left(\frac{a^3x^3 + b^6}{2axb^3}\right) y^2$$

mithin

$$y^2 = \left(\frac{2axb^3 + axb^3 + a^5}{a^3x^3 + b^6}\right) axy - \frac{2axb^6}{a^3x^3 + b^6}$$

oder

$$\text{P.)} \quad y^2 = \frac{(3axb^3 + a^5). \; axy - 2axb^6}{a^3x^3 + b^6};$$

Aus O und P. folgt

$$\frac{a^3x^3 + b^6}{2axb^3} y - \left(\frac{a^5 + ab^3x}{2b^3}\right) = \frac{(a^5 + 3ab^3x). \; ax}{a^3x^3 + b^6} y - \frac{2ab^6x}{a^3x^3 + b^6}$$

Hieraus

Hieraus fließt

$$\left(\frac{(a^5+3ab^3x).\ ax}{a^3x^3+b^6}-\left(\frac{a^3x^3+b^6}{2axb^3}\right)\right).\ y=\frac{2ab^6x}{a^3x^3+b^6}-\left(\frac{a^5+ab^3x}{2b^3}\right)$$

Folglich T.)

$$y=\left(\frac{2ab^6x}{a^3x^3+b^6}-\left(\frac{a^5+ab^3x}{2b^3}\right)\right):\left(\frac{(a^5+3ab^3x).\ ax}{a^3x^3+b^6}-\left(\frac{a^3x^3+b^6}{2axb^3}\right)\right)$$

und es wird nun aus der Gleichung k diese

$$\left(\frac{\frac{2ab^6x}{a^3x^3+b^6}-\left(\frac{a^5+ab^3x}{2b^3}\right)}{\frac{(a^5+3ab^3x)ax}{a^3x^3+b^6}-\frac{a^3x^3+b^6}{2ab^3x}}\right)^3=\frac{\left(\frac{2ab^6x}{a^3x^3+b^6}-\left(\frac{a^5+ab^3x}{2b^3}\right)\right)ax}{\frac{(a^5+3ab^3x)ax}{a^3x^3+b^6}-\frac{a^3x^3+b^6}{2ab^3x}}-b^3;$$

in der sich die y nicht mehr befindet.

§. 214.

Das gewöhnliche Verfahren, dessen man sich sonst bediente, die Natur der quadratischen und aller höhern Gleichungen zu erklären, und das noch Wolf, Wiedeburg, Agnesi u. a. gebraucht haben, war dieses:

„Man setze $x = a$, und $x = b$, also $x - a$
„$= 0$ und $x - b = 0$, so ergiebt sich durch
„die Multiplication

$$P.)\ (x - a).\ (x - b) = x^2 - ax + ab \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - b$$

$$Q.)\ = x^2 - px + q$$

„Nun sind beide Factoren $x - a$, $x - b$,
„$= 0$, folglich $x^2 = px + q = 0$, und x
„muß in dieser Gleichung zweene Werthe
„haben, die sich aus den beiden Wurzel-
„gleichungen $x - a = 0$, $x - b = 0$, ergeben,
„nämlich 1.) $x = a$;
2.) $x = b$.

Man wird aber bald finden, daß das ganze Verfahren falsch ist; einmal wird dazu, daß das quadratische Product $x^2 - px + q = 0$ seyn soll, nicht erfodert, daß beide Factoren $x - a$ und $x - b$ zugleich $= 0$ seyen, da jedes Produkt schon verschwindet, so bald einer seiner Factoren 0 ist. Wenn man aber auch diese überflüßige Voraussetzung, daß beide Factoren zugleich $= 0$ seyen, gelten ließe, so ist doch klar, daß in diesen Factoren a und b ganz verschiedene Größen seyn können; d. h. in der Gleichung 1.) $x - a = 0$ kann x eine Größe seyn, die von dem x in der Gleichung 2.) $x - b = 0$ völlig verschieden ist. Also ist es in Q falsch, daß $x. x = x^2$ gesetzt wird, und daß die beiden x in P, davon das eine a, das andere b zum Coefficienten hat, als ein einziges x ange-

gesehen, und daher beide Glieder $-ax-bx$ Q durch das einzige $-px$ ausgedrückt werden. er alle diese Widersprüche verschwinden, wenn man die Sache so vorträgt, wie es im Buche in diesem und den folgenden §§. geschehen ist, wiewohl man merken muß, daß aus Versehen in VI. bei der ersten Ausgabe, der ich mich hier bediene, auch beide Ausdrücke $=0$ gesetzt, und dadurch ähnliche Widersprüche hier eingeschlichen sind. Soll nämlich sowohl $x+\frac{1}{2}f-\sqrt{(\frac{1}{4}f^2-g)}$ als $x+\frac{1}{2}f+\sqrt{(\frac{1}{4}f^2-g)}=0$ seyn, so hat offenbar in diesen beiden Gleichungen R und S, x verschiedene Werthe, und hieraus folgt, daß in dem Produkt $x.x$ in $=x^2$, $\frac{1}{2}fx+\frac{1}{2}fx$ in $=fx$, und $(-x+x)\sqrt{(\frac{1}{4}f^2-g)}$ in $=0$, folglich das ganze Produkt in $=x^2+fx+g$ ein Versehen begangen worden ist. Indessen läßt sich dieses leicht verbessern, und ist auch in der zwoten Ausgabe nicht mehr zu finden.

§. 220.

Man nehme die cubische Gleichung

D.) $x^3-9x^2+26x-24=0$

so ist klar, daß sich die Größe zur Linken des Gleichheitszeichens als ein Produkt folgender drei Factoren ansehen läßt

$$x-2,\ x-3,\ x-4;$$

es ist nämlich

$(x-2).(x-3).(x-4)=x^3-9x^2+26x-24$

Nun wird $(x-2).(x-3).(x-4)=0$

 1.) für

1.) für $x = 2$;

alsdann wird nämlich

$$(2-2).(x-3).(x-4) = 0$$

2.) für $x = 3$

weil $(x-2).(3-3).(x-4) = 0$;

3.) für $x = 4$

weil $(x-2).(x-3).(4-4) = 0$;

Die Gleichung D hat demnach drei Werthe für x, und daß es allgemein wahr sei, daß jede cubische Gleichung drei Werthe für die unbekannte Größe enthält, erhellet schon aus dem, was im Buche gesagt wird; weil sich indessen hierbei die obigen Lehren von Wegschaffung der unbekannten Größen anwenden lassen, so wird es nicht ganz unnütz seyn, das im Buche gesagte nur einigermaßen zu erläutern, und Anfängern bei dieser Gelegenheit wenigstens noch ein Beispiel zu den obigen Aufgaben zu geben.

Man nehme nämlich an, es sei

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x-a).(x-b).(x-c) \quad K.)$$
$$= x^3 - (a+b+c)\,x^2 + (ab+ac+bc)\,x - abc,$$

so muß A.) $p = -(a+b+c)$

B.) $q = ab + ac + bc$

C.) $r = -abc$

seyn; da nun in diesen drei verschiednen Gleichungen nicht mehr, als drei unbekannte Grössen vorkommen, so lassen sich nach 211. in k die Werthe von abc bestimmen. Es lassen sich also in k allemal die drei Größen a, b, c, gehörig angeben, oder die ganze Größe $x^3 + px^2 + qx + r$ läßt

läßt sich allemal in drei Factoren $(x - a)$. $(x - b)$. $(x - c)$ zerfällen, so daß a, b, c, gehörig bestimmt sind. Nun ist die allgemeine cubische Gleichung diese:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \quad I.)$$

Um also die Werthe für x in der Gleichung I. zu suchen, so muß man solche Werthe in I. statt x setzen, welche machen, daß alle Glieder zur Linken zusammen die 0 ausmachen. Dieses läßt sich bequem dadurch bewerkstelligen, daß man die Gleichung I in ihre Factoren zerlegt, wie sie in K enthalten sind. Man darf also nur statt I die eben so allgemeine cubische Gleichung

$$(x - a).\ (x - b).\ (x - c) = 0 \quad R.)$$

betrachten und untersuchen, in wie vielen Fällen diese Gleichung wahr bleibt, oder wie viele Werthe man statt x setzen könne, so daß das Produkt in R verschwindet; da nun ein Produkt = 0 wird, so bald nur einer seiner Factoren = 0 ist, so ist offenbar die Gleichung R in diesen dreien Fällen richtig 1.) für $x = a$
2.) für $x = b$
3.) für $x = c$ also hat R, und mithin auch I drei verschiedene Wurzeln.

Wie sich nun aus den Gleichungen A, B, C, zwo von den drei Größen a, b, c, wegschaffen lassen, um dadurch eine Gleichung zu erhalten, in der nur noch eine der genannten Größen vorkommt, ergiebt sich auf folgende Art.

Es ist $p + b + c = -a$

$$\frac{bc - q}{b + c} = -a$$

$$\frac{r}{bc} = -a$$

wie sich aus den drei Gleichungen A, B, C, ergiebt. Hieraus folgt nun

$$1.)\ p + b + c = \frac{bc - q}{b + c}$$

$$2.)\ \frac{bc - q}{b + c} = \frac{r}{bc}$$

Demnach

$$pb + pc + b^2 + c^2 + bc = -q$$

$$pb + b^2 + q = -(p + b)\, c - c^2$$

Oder $c^2 = -(p + b)\, c - (pb + b^2 + q)$ P.)

Ferner

$$b^2c^2 - qbc = br + rc;$$

also $c^2 - \frac{q}{b} c = \frac{r}{b} + \frac{r}{b^2} c$

und $c^2 = \left(\frac{bq + r}{b^2}\right) c + \frac{r}{b}$

Hieraus folgt

$$-(p + b)\, c - (pb + b^2 + q) = \left(\frac{bq + r}{b^2}\right). c + \frac{r}{b}$$

und

$$\left(\frac{bq + r}{b^2} + p + b\right) c = -\frac{r}{b} (pb + b^2 + q)$$

mithin

mithin

$$c = \frac{\frac{-r}{b} - (pb + b^2 + q)}{\frac{bq + r}{b^2} + p + b} \quad S.)$$

Dieß in P gesetzt, giebt

$$\frac{\left(\frac{r}{b} + pb + b^2 + q\right)^2}{\left(\frac{bq + r}{b^2} + p + b\right)^2} + (p+b).\frac{\left(\frac{-r}{b} - (pb+b^2+q)\right)}{\frac{bq+r}{b^2} + p + b}$$

$+ pb + b^2 + q = 0$ eine Gleichung, die nur noch b enthält. Man kann auch aus P. den Werth von c suchen, und diesen statt c in s setzen. Man hat nämlich aus P.

$$c^2 + (p+b)c + \tfrac{1}{4}(p+b)^2 = \tfrac{1}{4}(p+b)^2 - (pb + b^2 + q)$$
$$= \tfrac{1}{4}p^2 + \tfrac{1}{2}pb + \tfrac{1}{4}b^2 - pb - b^2 - q$$
$$= \tfrac{1}{4}p^2 - \tfrac{1}{2}pb - \tfrac{3}{4}b^2 - q$$

also

$$c + \tfrac{1}{2}(p + b) = \pm \surd(\tfrac{1}{4}p^2 - \tfrac{1}{2}pb - \tfrac{3}{4}b^2 - q)$$

und $c = \dfrac{-(p+b) \pm \surd(p^2 - 2pb - 3b^2 - 4q)}{2}$

Dieses in s gesetzt, giebt

$$p+b \mp \surd(p^2 - 2pb - 3b^2 - 4q) = \frac{\frac{2r}{b} + 2(pb + b^2 + q)}{\frac{bq + r}{b^2} + p + b} \quad Q.)$$

 wo

wo wieder nur noch b vorkommt, das zwar noch nicht gefunden, aber doch offenbar bestimmt ist, weil nicht jede Größe statt b in Q gesetzt, macht, daß die Gleichung ihre Richtigkeit behält, sondern bestimmte Werthe von b hierzu erfordert werden.

§. 229.

Man erhebe $c + \sqrt{a}$ auf die mte Potenz, so ist nach 141.

$$(c + \sqrt{a})^m = c^m + ma^{m-1}\sqrt{a} + \frac{m.\,(m-1)}{1.\;\;2} c^{m-2}(\sqrt{a})^2 + \frac{m.\,(m-1).\,(m-2)}{1.\;\;2.\;\;3} c^{m-3}.\,(\sqrt{a})^3 - - -$$

wo das erste, dritte, fünfte u. s. w. Glied rational ist, da nämlich (wie in $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$) alle Potenzen von $\sqrt{a}$, im ersten Glied die 0te, im zweiten die erste, im dritten die zwote, und so im mten die $(m-1)$te Potenz von $\sqrt{a}$ vorkommt. Folglich befindet sich im $2n+1$ten Glied die $2n$te Potenz von $\sqrt{a}$; diese ist aber nach 228. rational. Hingegen enthält das $2n$te Glied die $2n-1$te Potenz von $\sqrt{a}$, die nach 228. irrational ist; es stellet nämlich n jede ganze Zahl vor. Es sind demnach in jeder Potenz von $\sqrt{a}$ alle grade Glieder irrational, alle ungrade rational.

§. 230.

§. 230.

Man könnte hierbei, wenn man die Sache nicht bedächte, leicht auf eine andere Rechnung gerathen, woraus man nicht $(\sqrt{-e})^{2n} = (-e)^n$, sondern $(\sqrt{-e})^{2n} = (+e)^n$ erhielte. Es ist nämlich

$$(\sqrt{-e})^{2n} = ((\sqrt{-e})^2)^n$$

$$= ((\sqrt{-e}) . (\sqrt{-e}))^n$$

P.) $= ((\sqrt{-e}) . (-e))^n$

oder Q.) $(\sqrt{-e})^{2n} = (\sqrt{+e^2})^n$

oder $(\sqrt{-e})^{2n} = e^n$

man muß sich aber erinnern, daß $\sqrt{+e^2}$ in Q sowohl $+e$ als $-e$ seyn kann; an sich gilt es gleich viel, ob man $\sqrt{e^2} = +e$ oder $= -e$ setzt, wenn es nicht andere Umstände entscheiden, welches von beiden man gebrauchen müsse. Hier nun zeigt die ganze Rechnung, daß die negative Wurzel $-e$ hierher gehöre. Aus P ist nämlich klar, daß das in Q befindliche Quadrat $+e^2$ aus der Wurzel $-e$ entstanden ist, oder daß hier $+e^2$ das Quadrat von $-e$ ist, folglich darf man hier $\sqrt{+e^2}$ nicht $= +e$, sondern $= -e$ setzen, daß also $(\sqrt{-e})^{2n} = -e^n$. Auf eben die Art ist $(\sqrt{-e})^{2n+1} = (\sqrt{-e})^{2n} . (\sqrt{-e}) = (-e)^n$, $\sqrt{-e} = \sqrt{(-e^{2n+1})}$; aber $-e^{2n+1}$ ist eine verneinte Größe (§. 31.), folglich $\sqrt{(-e^{2n+1})} = (\sqrt{-e})^{2n+1}$ unmöglich.

§. 231.

§. 231.

In 141. n statt des dortigen m, c statt des dortigen a, und $\sqrt{-e}$ statt b gesetzt, giebt

$$(c + \sqrt{-e})^n = c^n + nc^{n-1}\sqrt{-e} + \frac{n.(n-1)}{1.\;2}.\; c^{n-2} \times (\sqrt{-e})^2 \text{ - - - }$$

wo alle Potenzen von $\sqrt{-e}$, im ersten Gliede die 0te, im zweiten die erste, im mten die m−1te Potenz von $\sqrt{-e}$ vorkommt. In den ungraden Gliedern befinden sich also lauter grade Potenzen von $\sqrt{-e}$, in den graden lauter ungrade; jene sind aus 230. alle möglich, diese aber unmöglich.

§. 234.

Enthält die Gleichung P.)
$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} \text{ - - - } + z = 0$$
die Wurzel $c + b\pi$, so ist auch $c - b\pi$ eine Wurzel derselben (33.) daß also die Gleichung sowohl für $x = c + b\pi$, als für $x = c - b\pi$, $= 0$ wird. Sind also die übrigen Wurzeln der Gleichung a, b, c - - - - so ist P. ein Produkt aus den Wurzelgleichungen $(x - a).\ (x - b).\ (x - c)$ - - - - $(x - c - b\pi).\ (x - c + b\pi)$ das sich durch $(x - c - b\pi).\ (x - c + b\pi) = x^2 - 2cx + c^2 - b^2\pi^2$ dividiren läßt, wodurch man eine Gleichung von dem m − 2ten Grad erhält.

§. 239.

Auch hier findet sich das Versehen, das in VI. 214. bemerkt worden, indem $z^2 - e^2$ und $z^2 + e^2$ zugleich = o gesetzt werden. Es läßt sich aber leicht verbessern. Es ist nämlich

$$z^4 - e^4 = o$$
$$= (z^2 - e^2) \cdot (z^2 + e^2)$$

nun sei $z^2 - e^2 = p$, $z^2 + e^3 = q$, so hat man

$$Q.)\ z^4 - e^4 = o = pq;$$

aber pq wird in zween Fällen = o

1.) für $p = o$.
2.) für $q = o$.

Nun ist $p = (z^2 - e^2) = (z + e).(z - e)$, daß also p sowohl für $z + e = o$, als für $z - e = o$ verschwindet, und eben so wird q in zween Fällen $= o$; da nämlich $q = z^2 + e^2$, so wird für $q = o$, $z^2 + e^2 = o$, also $z = \pm \sqrt{-e^2}$, oder q wird $= o$ sowohl für $z + \sqrt{-e^2} = o$ als für $z - \sqrt{-e^2} = o$, demnach pq oder $z^4 - e^4$ in vier Fällen $= o$

1.) für $z = e$;
2.) für $z = -e$
3.) für $z = +\sqrt{-e^2}$
4.) für $z = -\sqrt{-e^2}$.

§. 241.

Auf diese Art lassen sich allemal die beide unmögliche Wurzeln des dritten Grads von jeder gegebenen Zahl finden, wenn man nur in der Formel $y = f.\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$ statt f die mögliche

che Cubikwurzel aus der gegebenen Zahl setzt, oder jedesmal besonders dividirt.

Ex. Alle drei Cubikwurzeln von 27 zu finden. Hier ist $f = 3$; die Division giebt also

$$\begin{array}{l|l|l} y - 3 & y^3 - 27 & y^2 + 3y + 9 \\ & y^3 - 3y^2 & \\ \hline & * \; 3y^2 - 27 & \\ & \;\; 3y^2 - 9y & \\ \hline & \;\; * \; 9y - 27 & \\ & \;\;\;\; 9y - 27 & \\ \hline & \;\;\;\; * & \end{array}$$

Also hat man

$$y^2 + 3y + 9 = 0$$

$$y^2 + 3y + \tfrac{9}{4} = \tfrac{9}{4} - 9$$

mithin $$y + \tfrac{3}{2} = \pm r\left(\frac{9 - 36}{4}\right)$$

$$= \pm \frac{r(-27)}{2}$$

und $$y = \frac{-3 \pm r(-27)}{2}$$

daß also alle Cubikwurzeln, oder alle Zahlen, die auf die dritte Potenz erhoben 27. geben, diese sind

1.) $y = 3$;

2.) $y = \frac{-3 + r(-27)}{2}$;

3.) $y = \frac{-3 - r(-27)}{2}$;

§. 243.

§. 243.

Die Division giebt

$$
\begin{array}{l|l|l}
r-1 & r^\varepsilon - 1 & r^{\varepsilon-1} + r^{\varepsilon-2} + r^{\varepsilon-3} \ldots + 1 \text{ Q.)} \\
 & r^\varepsilon - r^{\varepsilon-1} & \\
\hline
 & * \; r^{\varepsilon-1} - 1 & \\
 & \quad r^{\varepsilon-1} - r^{\varepsilon-2} & \\
\hline
 & * \; r^{\varepsilon-2} - 1 & \\
 & \quad r^{\varepsilon-2} - r^{\varepsilon-3} & \\
\hline
 & * \; r^{\varepsilon-3} - 1 &
\end{array}
$$

Geht nämlich die Reihe im Quotienten fort, so wird die Zahl, welche von ε jedesmal abgezogen wird, in jedem folgenden Glied um 1. grösser, und endlich $= \varepsilon$, folglich der Exponent $= 0$, d. i. man erhält endlich im Quotienten $r^0 = 1$. Der Rest, der durch $r - 1$ dividirt im Quotienten $r^{\varepsilon-\varepsilon} = r^0 = 1$ giebt, muß selbst $r^{\varepsilon-(\varepsilon-1)} - 1 = r - 1$ seyn; der Divisor $r-1$ mit dem Theil des Quotienten 1 multiplicirt giebt $r-1$; dieß von dem vorhergehenden Rest $r^{\varepsilon-(\varepsilon-1)}$ abgezogen, läßt 0; die Division bricht also hier ab, und 1. ist des Quotienten letztes Glied.

Ex. Es sei $r = 3$, $\varepsilon = 2$, so ist $\frac{3^2-1}{3-1} = 3^{2-1} + 3^{2-2} = 3 + 1$. Für $r = 4$, $\varepsilon = 3$ erhält man $\frac{63}{3} = 4^2 + 4^1 + 4^0 = 16 + 4 + 1 = 21$. Setzt man $r = \frac{b}{a}$, so ist $r^\varepsilon = \frac{b^\varepsilon}{a^\varepsilon}$, folglich $\frac{r^\varepsilon - 1}{r-1} =$

(b^ε−1

$$\left(\frac{b^\varepsilon}{a^\varepsilon} - 1\right) : \left(\frac{b}{a} - 1\right) = \left(\frac{b^\varepsilon - a^\varepsilon}{a^\varepsilon}\right) : \left(\frac{b-a}{a}\right)$$

$= \left(\frac{b^\varepsilon - a^\varepsilon}{a^{\varepsilon - 1}}\right) : (b-a)$; der Ausdruck $\left(\frac{b^\varepsilon - a^\varepsilon}{a^{\varepsilon - 1}}\right) :$

$(b-a)$ ist also mit dem $\left(\frac{b^\varepsilon}{a^\varepsilon} - 1\right) : \left(\frac{b}{a} - 1\right)$

einerley. Man darf daher nur im Quotienten

von $\left(\frac{b^\varepsilon - a^\varepsilon}{a^{\varepsilon - 1}}\right) : (b-a)$ statt r in Q, $\frac{b}{a}$ setzen,

so findet man $\left(\frac{b^\varepsilon - a^\varepsilon}{a^{\varepsilon - 1}}\right) : (b-a) = \frac{b^{\varepsilon - 1}}{a^{\varepsilon - 1}} +$

$\frac{b^{\varepsilon - 2}}{a^{\varepsilon - 2}} \cdots + 1;$

Da nun $\left(\frac{b^\varepsilon - a^\varepsilon}{a^{\varepsilon - 1}}\right) : (b-a) = \frac{b^\varepsilon - a^\varepsilon}{a^{\varepsilon-1}(b-a)}$,

so ist

$$\left(\left(\frac{b^\varepsilon - a^\varepsilon}{a^{\varepsilon - 1}}\right) : (b-a)\right) a^{\varepsilon - 1} = \frac{b^\varepsilon - a^\varepsilon}{b-a}$$

$$= \left(\frac{b^{\varepsilon - 1}}{a^{\varepsilon - 1}} + \frac{b^{\varepsilon - 2}}{a^{\varepsilon - 2}} \cdots + 1\right) a^{\varepsilon - 1}$$

$$= \frac{b^{\varepsilon-1} . a^{\varepsilon - 1}}{a^{\varepsilon - 1}} + \frac{b^{\varepsilon - 2} . a . a^{\varepsilon - 2}}{a^{\varepsilon - 2}} + \frac{b^{\varepsilon - 3} a^2 . a^{\varepsilon - 3}}{a^{\varepsilon - 3}} \cdots + 1 . a^{\varepsilon - 1}$$

$$= b^{\varepsilon - 1} + b^{\varepsilon - 2} a + b^{\varepsilon - 3} a^2 + b^{\varepsilon - 4} a^3 \cdots + a^{\varepsilon - 1}$$

wie

wie auch die Division giebt

$$b-a \mid b^{\varepsilon}-a^{\varepsilon} \mid b^{\varepsilon-1}+ab^{\varepsilon-2}+a^2b^{\varepsilon-3}\ldots a^{\varepsilon-1}$$

$$\begin{array}{ll} & b^{\varepsilon}-ab^{\varepsilon-1} \\ \hline 1.) & * \; ab^{\varepsilon-1}-a^{\varepsilon} \\ & ab^{\varepsilon-1}-a^2b^{\varepsilon-2} \\ \hline 2.) & * \; a^2b^{\varepsilon-2}-a^{\varepsilon} \\ & a^2b^{\varepsilon-2}-a^3b^{\varepsilon-3} \\ \hline 3.) & * \; a^3b^{\varepsilon-3}-a^{\varepsilon} \end{array}$$

Setzte man nämlich hier die Division fort, so würde man endlich auf einen Rest kommen, der in der Reihe der Reste der εte wäre. Nun kommt in jedem Rest $-a^{\varepsilon}$ vor, und außerdem enthält der erste $ab^{\varepsilon-1}$, der zweete $a^2b^{\varepsilon-2}$, der dritte $a^3b^{\varepsilon-3}$ u. s. f. also wird der εte Rest seyn $a^{\varepsilon}b^{\varepsilon-\varepsilon}-a^{\varepsilon}=0$, daß also die Division hier aufgeht, folglich der εte Rest das letzte Glied des Quotienten giebt; dieser $\varepsilon-1$te Rest ist aber $a^{\varepsilon-1}b^{\varepsilon-(\varepsilon-1)}-a^{\varepsilon}=a^{\varepsilon-1}b-a^{\varepsilon}$, und dieser, durch $b-a$ dividirt, giebt im Quotienten $a^{\varepsilon-1}$, daß also $a^{\varepsilon-1}$ das letzte Glied im Quotienten giebt.

§. 245.

Die wirkliche Division giebt

$$r+1 \mid r^{\varepsilon}+1 \mid r^{\varepsilon-1}-r^{\varepsilon-2}\ldots\ldots+1$$

$$\begin{array}{l} r^{\varepsilon}+r^{\varepsilon-1} \\ \hline * -r^{\varepsilon-1}+1 \\ -r^{\varepsilon-1}-r^{\varepsilon-2} \\ \hline * \; r^{\varepsilon-2}+1 \end{array}$$

wo man endlich auf ein Glied im Quotienten kommt, das $= r^{\varepsilon - (\varepsilon - 1)} = r$; da aber im Quotienten jedes Glied, das einen ungraden Exponenten von r, oder einen Exponenten, in welchem eine grade Zahl von ε abgezogen wird, enthält, verneint ist, indem ε hier als ungrad angenommen wird, so kommt man endlich auf $-r^{\varepsilon - (\varepsilon - 1)} = -r$, und hierauf auf $r^{\varepsilon - (\varepsilon - 1) - 1} = r^0 = 1$, mithin

$$\frac{r^\varepsilon + 1}{r + 1} = r^{\varepsilon - 1} - r^{\varepsilon - 2} + r^{\varepsilon - 3} \text{ --- } - r + 1$$

und der Quotient von $\frac{b^\varepsilon + a^\varepsilon}{b + a}$ bleibt eben der, den $\frac{b^\varepsilon - a^\varepsilon}{b - a}$ hat, wenn man nur das zweite, vierte, sechste u. s. f. jedes grade Glied verneint nimmt.

§. 261.

Oder eigentlich, weil $(\pm\sqrt{-1}) . (\pm\sqrt{-1}) = -1$, so ist

$$(\mp\sqrt{-1}) . (\pm\sqrt{-1}) = 1,$$

also
$$\frac{1}{\pm\sqrt{-1}} = \mp\sqrt{-1}; \quad \text{Q.)}$$

Ließe man nämlich das zweideutige Zeichen vor dem $\sqrt{}$ weg, so ergäbe sich eben so

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{+1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{\left(\frac{+1}{-1}\right)} = \sqrt{-1} \quad \text{R.)}$$

wie Euler wenigstens in dem §. 184. angeführten Buche (I. Th. §. 149.) schließt. Beide Gleichungen nach

nach dem Aut. $\frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$

nach Eul. a. a. O. $\frac{1}{\sqrt{-1}} = +\sqrt{-1}$

scheinen also einander zu widersprechen; man sieht aber leicht, daß dieser scheinbare Widerspruch blos daher rühret, weil bei R $\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{+1}}{\sqrt{-1}}$, also $1 = +\sqrt{1}$ genommen wird, da doch eben so wohl $1 = -\sqrt{1}$;

§. 267.

Es ist nämlich

$$\frac{b^\alpha + f^\alpha}{b^2 - f\pi^2} = b^{\alpha-2} + f\pi^2 b^{\alpha-4} + f\pi^4 b^{\alpha-6} \ldots + f\pi$$

§. 269.

Diese unmögliche Factoren geben nämlich mit einander multiplicirt vermöge 268. $b^\varepsilon + f^\varepsilon = (b + f\pi) . (b^{\varepsilon-1} - ab^{\varepsilon-2} + a^2 b^{\varepsilon-3} \ldots)$, also geben diese unmögliche Factoren ohne den $b + f\pi$ mit einander multiplicirt den Quotienten 245. Ferner

$$\frac{b^\varepsilon + f^\varepsilon}{(b + f\pi) . (b - f\pi)} = b^{\varepsilon-2} + (f\pi)^2 b^{\alpha-4}$$
$$+ f\pi^4 b^{\alpha-6} \ldots + f\pi \text{ (267.)}$$

also $b^{\varepsilon} + f^{\varepsilon} = (b^{\varepsilon-2} + (f\pi)^2 b^{\alpha-4} + (f\pi)^4 b^{\alpha-6}$
$---- + f\pi) \, . \, (b + f\pi) \, . \, (b - f\pi)$

Läßt man also aus dem Product aller Factoren, die mit einander multiplicirt $b^{\varepsilon} + f^{\varepsilon}$ geben, die beiden Factoren $b + f\pi$ und $b - f\pi$ weg, so bleibt zum Product der übrigen

$$b^{\varepsilon-2} + (f\pi)^2 b^{\alpha-4} + (f\pi)^4 b^{\alpha-6} \, ... \, f\pi$$

oder der Quotient 246. übrig.

§. 285.

Vermöge 224. ist des zweiten Glieds Coefficient = der Summe der negativen Wurzeln. Fehlt also das zweite Glied, oder ist es = 0, so ist sein Coefficient folglich die genannte Summe = 0, welches nicht seyn kann, wenn nicht wenigstens eine Wurzel verneint ist.

§. 287.

Des dritten Glieds in P (289.) Coefficient = 0 gesetzt, giebt

$$\frac{m.(m-1)}{1. \quad 2} e^2 + (m-1). \, ep + q = 0$$

Man setze in 184.

statt $\frac{m.(m-1)}{1. \quad 2}$	p. (m − 1)	q	x
hier a	b	c	e

so

so ergiebt sich

$$e = \frac{(1-m)p \pm \sqrt{\left(p^2(m-1)^2 - 4q.\frac{m.(m-1)}{1.\ 2}\right)}}{m.\ (m-1)}$$

$$= -\frac{1}{m}p \pm \sqrt{\left(\frac{p^2\ (m-1)^2}{m^2.\ (m-1)^2} - 4q.\frac{m.(m-1)}{2m^2(m-1)^2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{m}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{m^2}p^2 - \frac{2q}{m.\ (m-1)}\right)}$$

§. 294.

Aus der Aufgabe selbst ist klar, daß man das letzte Glied nur in solche Factoren zerfällen soll, die ganze Zahlen sind. Man sieht aber bald, daß dieses Verfahren sehr unzulänglich ist. Es sei nämlich z. B.

$$x^3 - \tfrac{587}{24}\ x^2 + \tfrac{265}{24}\ x - 1 = 0 \quad Q.)$$

so hat das letzte Glied offenbar keine ganze Zahlen zu Factoren, ausser $\pm$ 1; aber keiner von diesen statt x in Q gesetzt, bringt die Gleichung auf 0, und doch wäre der Schluß, daß es nun keine ganze Zahl zur Wurzel gebe, falsch. Das letzte Glied könnte nämlich und muß nothwendig allemal ein Produkt aus ganzen Zahlen in Brüche seyn. So könnten hier die drei Factoren der 1. diese seyn: $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{94}$, 1128, weil $1 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{94} \cdot 1128$, und man müßte also eigentlich, um zu

finden, ob eine Gleichung ganze Zahlen zu Wurzeln habe, nicht bloß mit den ganzen Zahlen, die das letzte Glied zu Factoren hat, die Probe anstellen, sondern überhaupt mit solchen ganzen Zahlen, die auch mit Brüchen multiplicirt, das letzte Glied zum Produkt geben; d. i. man muß mit allen möglichen ganzen Zahlen die Probe machen, ob irgend eine statt x gesetzt, die Gleichung auf 0 bringt. Wenn man auf diese Art hier herumtappt, so wird man finden, daß in Q ein Factor des letzten Glieds 1. die 24. ist, wie man gewiß nicht würde vermuthet haben. Daher ist dieses Verfahren, wie überhaupt die folgenden Sätze bis an 304. ohne sonderlichen Nutzen. S. 298. am Ende.

§. 297.

In der Gleichung (H.) 294. habe man eine Wurzel $x = 12$ gefunden, so giebt die Division

$$
\begin{array}{r|l|l}
x - 12 & x^3 - 124x - 240 & x^2 + 12x + 20 \\
 & x^3 - 12x^2 & \\
\hline
 & * \quad 12x^2 - 124x & \\
 & 12x^2 - 144x & \\
\hline
 & * \quad 20x - 240 & \\
 & 20x - 240 & \\
\hline
 & * &
\end{array}
$$

wodurch

wodurch man also die quadratische Gleichung

$$x^2 + 12x + 20 = 0$$

erhält, und hieraus ergiebt sich vermittelst 78. $x = -6 \pm \sqrt{16} = -6 \pm 4$, oder die beiden übrigen Werthe von x sind

$$x = -2$$

$$x = -10$$

wie man durch mühsameres Versuchen in 294. fand.

§. 303.

Ex. Es sei die biquadratische Gleichung

$$x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 68x + 72 = 0 \quad P.)$$

gegeben, so ist

$$12x^3 + 7x^2 - 68x > x^4$$

mithin $12x^2 + 7x - x^3 > 68$

und $12x + 7 > x^2$

also $7 > x^2 - 12x$

und um so mehr

$$7 > x - 12,$$

folglich

1.) $x < 19$.

Eben so giebt sich aus P.

$$12x^3 + 7x^2 > 68x \text{ oder}$$

$$12x^2 + 7x > 68$$

und um so viel mehr

$$19x^2 > 68$$

weil hier vorausgesetzt wird, daß x bejaht ist. Hieraus nun folgt $x^2 > \frac{68}{19}$ und

2.) $x > \sqrt{\frac{68}{19}}$ oder $> 1,8$

daß alſo ein bejahter Werth von x zwiſchen 1, 8 und 19 fällt. Sucht man auf eben die Art die Gränzen der Wurzeln für die Gleichung

$$x^4 + 6x^2 - 13x + 19 = 0;$$

ſo ergiebt ſich

1.) $x < \sqrt{7}$ oder
$< 2,64;$

2.) $x > 2\frac{5}{7}$, oder
$> 2,71;$

welches unmöglich iſt; d. h. es giebt hier kein x, das bejaht und zugleich eine ganze Zahl wäre.

§. 323.

Eine Funktion heißt algebraiſch oder transcendentiſch, nachdem ſich die veränderlichen Größen in ihr gehörig beſtimmen laſſen oder nicht. So läßt ſich zwiſchen Sehne und zugehörigem Bogen eines Kreiſes keine algebraiſche Funktion angeben, weil zu einer Sehne unzählig viele Bogen gehören, und daher der Bogen, dem eine gegebene Sehne zugehört, gar nicht beſtimmt werden kann. Im erſten Fall läßt ſich entweder durch algebraiſche Kunſtgriffe die veränderliche Größe von den andern völlig abſondern, oder nicht; eine Funktion von der erſten Art heißt eine abgeſonderte (explicita), von der zwoten Art heißt eine verwickelte (implicita). Jede Funktion einer veränderlichen

Größe

Größe ist ferner von der Art, daß, wenn alles in der Funktion unverändert bleibt, die veränderliche Größe nur einen einzigen oder mehrere Werthe hat, wie die Wurzel einer höhern Gleichung; jene heißt eine **einförmige** (uniformis), diese eine **vielförmige** (multiformis), und zwar eine **zweiförmige, dreiförmige** u. s. f. nachdem die veränderliche Größe zwei, drei u. m. Werthe hat. In Rücksicht auf die Dimensionen der veränderlichen Größen giebt es wieder verschiedene Abtheilungen; man betrachtet nämlich entweder die Dimensionen aller Glieder in Absicht auf ihre Uebereinstimmung, oder die Dimension jeder veränderlichen Größe besonders. Im ersten Fall haben entweder alle Glieder gleiche Dimensionen, oder nicht, und dadurch giebt sich die Abtheilung in **gleichartige** und **ungleichartige** Funktionen (homogeneae et heterogeneae); im letzten Fall hat entweder die veränderliche Größe irgendwo einen gebrochenen Exponenten, oder nicht; jenes giebt eine **irrationale**, dieses eine **rationale** Funktion. Kommt in der Funktion die veränderliche Größe irgendwo im Nenner eines Bruchs vor, so ist die Funktion eine **gebrochene**, in andern Fällen aber eine **ganze**. Hat eine Funktion nur eine veränderliche Größe, die einen Exponenten haben kann, welchen man will, und in eine beständige Größe multiplicirt ist, so heißt sie eine **unvermischte** (incom-

 plexa),

plexa), in allen andern Fällen eine vermischte (complexa). Man könnte noch die Funktionen in bejahte und verneinte abtheilen, wenn es nöthig schiene, die Menge der schon genannten Abtheilungen noch um eine zu vermehren. Indessen wird es nicht ganz unnütz seyn, dieser Abtheilungen hier erwähnt zu haben, weil sie nicht nur zu Abkürzungen im Vortrag dienen, und also einen wirklichen Nutzen haben, sondern weil auch Anfänger dadurch zum voraus von der Bedeutung dieser Ausdrücke unterrichtet sind, wenn sie Schriften lesen, wo sie gebraucht werden.

§. 324.

Die Geometrie lehrt, daß

$$Ad : Dd = Dd : dB$$

oder $$x : y = y : dB,$$

mithin $$y^2 = dB.\ x$$

Aber $$dB = AB - Ad,$$

folglich $$y^2 = x.\ (AB - Ad)$$

$$= x.\ (a - x)$$

oder $$y^2 = ax - x^2$$

Hier ist x eine Funktion von y, und zwar nach 323. eine ungleichartige, rationale, zweiförmige und ganze Funktion.

§. 340.

Die Aufgabe fodert eigentlich nur die Gestalt der Linie zu finden, die der genannten Gleichung zugehört. SBMN sei die gesuchte Linie; man nehme die willkührliche grade Linie CD zur Abscissenaxe und einen beliebigen Punkt in ihr, wie A, als den Anfangspunkt der Abscissen an. Soll nun die Linie SBMN der gegebenen Gleichung

$$y = \frac{bx}{a} + c \quad Q.)$$

zugehören, so setze man x = o; dadurch ergiebt sich der Werth von demjenigen y, das dem x = o zugehört, oder von derjenigen Ordinate, die in dem Anfangspunkt der Abscisse steht; aber für x = o wird in Q $y = \frac{b.\ o}{a} + c = c$; man ziehe also unter einem gegebenen Ordinatenwinkel eine Linie AB = c in den Anfangspunkt der Abscissen A, so ist dieses die Ordinate für die Linie, deren Gestalt man sucht, im Anfangspunkt der Abscissen, und B liegt also in der Linie, die der gegebenen Gleichung zugehört. Noch einen Punkt dieser Linie zu finden, suche man den Punkt, wo die Ordinate = o ist; in diesem Fall wird nämlich $\frac{bx}{a} + c = y = o$, also $\frac{bx}{a} = -c$, und $x = -\frac{ac}{b}$; eine Abscisse also $= -\frac{ac}{b}$ von A ausgenommen, und

aus

aus dem Endpunkt dieser Abscisse die zugehörige Ordinate gezogen, giebt die Ordinate = o, oder der Endpunkt dieser Abscisse muß in der Linie, deren Gestalt man sucht, liegen. Da aber diese Abscisse $= -\frac{ac}{b}$ also verneint ist, und die bejahten gegen die Rechte genommen werden sollen, so ist klar, daß man sie gegen die Linke oder von A nach C zu nehmen müsse; nimmt man also von A nach C zu die $AO = \frac{ac}{b}$, so liegt O in der Linie, die der Gleichung $y = \frac{bx}{a} + c$ zugehört. Man setze nun weiter, M, N seyen Punkte, die gleichfalls in der Linie liegen, deren Gestalt man sucht, so folgt aus der gegebenen Gleichung (Q.) für diese Linie diese

$$(y - c) : x = b : a \quad R.)$$

folglich ist $(y - c) : x$ eine unveränderliche Verhältniß, da b und a beständige Größen bedeuten; zieht man also durch den vorhin gefundenen Punkt der Linie B eine der Abscissenaxe CD parallele Linie BT, und aus M, N, die Ordinaten MP, NQ, der AB gleichlaufend, so ist aus R

$$MS : BS = (MP - AB) : AP = (y - c) : x = b : a$$
$$NT : BT = (NQ - AB) : AQ = (y - c) : x = b : a$$

und da $AO = \frac{ac}{b}$, so ist auch

c : AO

c : AO = b : a oder BA : AO = b : a
also MS : BS = NT : BT = BA : AO
Dieses kann aber nicht seyn, wenn nicht M und N mit den schon gefundenen Punkten der Linie O und B in einer graden Linie liegen, wie aus dem Buche klar ist; nun können aber M, N, jeden Punkt der Linie vorstellen, folglich müssen alle Punkte der Linie, die der Gleichung Q zugehört, in einer graden Linie liegen, oder die Linie, deren Gestalt man sucht, ist eine grade.

§. 241.

Wenn man nach den obigen Abtheilungen Funktionen bejahte oder verneinte nennt, nachdem die Größen, welche Funktionen von einander sind, einerlei ooer verschiedene Zeichen vor sich haben, so läßt sich aus der Gleichung Q folgendes schließen. Für jeden bejahten Werth von x ist x eine bejahte Funktion von y, und bleibt eine bejahte, bis x = o wird, da die zugehörige Ordinate = AB ist. Wird nun die Abscisse verneint, so wird auch die genannte Funktion verneint, bis y = o oder $x = -\frac{ac}{b}$ ist: für ein verneintes x, das $> \frac{ac}{b}$ ist, wird y verneint; bezeichnet man nämlich die Größe, um wie viel das verneinte x die $\frac{ac}{b}$ übertrift, mit e, so wird

für

für die Fälle, da ein verneintes x größer als $\frac{ac}{b}$ ist, $y = \frac{b}{a}.\left(-\left(\frac{ac}{b} + e\right)\right) + c = -\left(c + \frac{be}{a}\right)$ $+ c = -\frac{be}{a}$ also auch verneint, und die verneinte Funktion wird also für Abscissen, die $= -\left(\frac{ac}{b} - e\right)$ sind, wieder bejaht, daß also in allen Fällen so wohl für bejahte als verneinte Abscissen x eine bejahte Funktion von y ist; nur die Fälle ausgenommen, da x zwischen o und $-\frac{ac}{b}$ fällt.

§. 349.

Von hier geht die Lehre von den Kegelschnitten an, die in der Ausübung von ungemeinem Nutzen sind, und schon von den ältesten Zeiten her die Aufmerksamkeit der Geometer auf sich gezogen haben. Die Alten bemerkten nämlich, daß man durch Zerschneidung eines Kegels verschiedene Arten von krummen Linien erhalte, wozu sie zwar anfangs mehr aus Curiosität, als aus Betrachtung ihres Nutzens, geleitet wurden; in der Folge bemerkte man aber überall den ausgebreiteten Nutzen dieser Linien, und suchte ihre Eigenschaften besonders durch die Analysis immer mehr zu entwickeln. Hier kommt bis auf 467. nur das nothwendigste davon vor. In dem

Buche werden die Gleichungen für diese Linien als bekannt angenommen, und daraus ihre Eigenschaften hergeleitet; um indessen Anfängern zu zeigen, wie sich dergleichen Linien aus Kegeln schneiden lassen, und wie man aus Betrachtung des Kegels Gleichungen für diese Linien herleiten kann, wird es nicht unnütz seyn, folgendes hier zu bemerken.

I.

BDMNCOD sei ein senkrechter Kegel, BCD ein Durchschnitt durch ihn, in dessen Ebene des Kegels Axe liegt; nun lege man durch irgend einen Punkt in BC als A eine Ebene parallel mit BD und senkrecht auf BDC, so heißt die Linie δmTAβε, worin diese Ebene des Kegels Oberfläche schneidet, eine Parabel; die grade Linie Ad, worin die schneidende Ebene den Axen-Triangel BDC schneidet, heißt der Parabel Axe, auch ihr Hauptdurchmesser, und A ihr Scheitel.

II.

Man stelle sich durch irgend einen Punkt in AC, als n, eine Ebene durch des Kegels Axe BF senkrecht gelegt vor, so lehrt die Geometrie, daß die Linie nτrpn, worin diese Ebene des Kegels Oberfläche schneidet, ein Kreis ist, und nr ist sein Durchmesser; zieht man nun aus s, dem Punkt, wo der Parabel und des Kreises

Durch-

Durchmesser einander schneiden, eine grade Linie ST senkrecht auf nr, so wird ST auch senkrecht auf Ad der Parabel Axe; oder ST ist zugleich die zur Abscisse As = x und zu ns gehörige senkrechte Ordinate y. Es ist demnach

$$ns : ST = ST : sr,$$

also $$ST^2 = ns \,.\, sr \quad P.)$$

Nun ist

$$Br : rn = As : sn$$

also $$ns = \frac{As.\ nr}{Br}$$

Dieß in P. gesetzt, giebt

$$ST^2 = \frac{As.\ nr}{Br}.\ sr \quad Q.)$$

und da der Punkt s offenbar, wo man will, liegen kann, und die Gleichung Q. allemal richtig bleibt, so hat man allgemein, statt As, x, und statt ST, y gesetzt

$$y^2 = \frac{rn}{Br}.\ sr.\ x$$

$$= \frac{rn}{Br}.\ AL.\ x$$

aber $$rn : Br = ns : As = ns : x,$$

also $$y^2 = \frac{ns}{x}.\ AL.\ x \quad R.)$$

wie man auch unmittelbar aus P. hätte schließen können.

III. Man

III.

Man mag x und y so groß nehmen, als man will, so behält offenbar $\frac{ns}{x}$ sowohl, als AL immer einerlei Größe; folglich ist $\frac{ns}{x}$. AL eine beständige Größe, die man gewöhnlich, wie auch hier im Buche geschehen, mit dem Buchstaben a bezeichnet, wodurch sich dann die Gleichung R in die im Buche verwandelt, nämlich

$$y^2 = ax;$$

Da diese beständige Größe a das Maas ist, wornach man die Verhältniß der Abscissen und Ordinaten gegen einander beurtheilt, und da sie überdas durch lauter Linien AL, nr, Br, welche nicht in der Ebene der Parabel selbst, sondern neben ihr in dem Kegel liegen, bestimmt wird, so hat man sie den Parameter (Nebenmesser) genannt.

IV.

Auf einem gegebenen Kegel BCD den Punkt zu finden, aus welchem sich eine gegebene Parabel schneiden läßt, oder ihren Scheitelpunkt auf des Kegels Fläche anzugeben.

Aufl. Nach der Aufgabe ist der Punkt B und $\frac{y^2}{x}$ gegeben; es ist aber

$$\frac{y^2}{x} = \frac{ns}{x} . AL$$

$$= \frac{\sin B}{\sin (90° - \frac{1}{2} B)} . AL = \frac{\sin B}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} B} . AL;$$

Da nun $AL : \sin B = AB : \sin (90° - \frac{1}{2} B)$

$= AB : \operatorname{Cos} \frac{1}{2} B$

mithin $AL = \frac{AB. \sin B}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} B}$

so wird $y^2 : x = \frac{\sin B}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} B} . \frac{AB. \sin B}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} B}$

$= \frac{AB. \sin B^2}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} B^2}$

$= a;$

Folglich

$AB = \frac{y^2. \operatorname{Cos} \frac{1}{2} B^2}{x. \sin B^2}$ S.)

$= \frac{a. \operatorname{Cos} \frac{1}{2} B^2}{\sin B^2};$

welches die Entfernung des gesuchten Punkts A von des Kegels Spitze ist.

Ex. Man soll aus einem Kegel, dessen Scheitelwinkel B 30° beträgt, eine Parabel schneiden, in der allemal das Quadrat der Ordinate doppelt so groß, als die zugehörige Abscisse ist: man sucht die Stelle A, wo der Schnitt diese Parabel giebt.

Hier

Hier ist in S, $\frac{y^2}{x} = 2$,

$$\begin{aligned}
& \log \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} B = 9{,}9849438 \\
\text{also} \quad & \log (\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} B)^2 = 19{,}9698876 \\
\text{und} \quad & \log \sin B = 9{,}6989700 \\
\text{mithin} \quad & \log \sin B^2 = 19{,}3979400
\end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$\log (\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} B)^2 - \log \sin B^2 = 0{,}5719476$$

die hierzu gehörige Zahl ist 3,732; werden also x und y in Zollen ausgedrückt, so, daß $\frac{y^2}{x} = a = 2''$, so wird aus (S.) die Entfernung des gesuchten Punkts A von des Kegels Spitze B oder

$$AB = 2 \cdot 3{,}732'' = 7''4'''6^{\text{IV}}4^{\text{V}}$$

V.

Die in IV. gefundene Gleichung giebt

$$y^2 = \frac{AB. \sin B^2. \ x}{\operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} B^2}$$

welche mit der Gleichung in II. für die Parabel völlig einerlei ist, nur daß man hier andere Grössen substituirt hat.

VI.

Es ist eine Parabel nebst der Entfernung des Punkts A, wo man den Kegel schneiden soll, von des Kegels Spitze B gegeben, man soll den Kegel finden, aus dem sich die gegebene Parabel schneiden läßt.

Aufl. Den Kegel finden, heißt hier den Winkel finden, den zwo Linien DB, CB, an des Kegels Scheitel B auf seiner Fläche mit der Axe BF in einer Ebene gezogen, mit einander machen. Es folgt aber aus V.

$$\frac{\sin B^2}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} B^2} = \frac{y^2}{AB.\ x}$$

oder, wie die Trigonometrie zeigt

$$\frac{1-\operatorname{Cos} B^2}{\left(\frac{1+\operatorname{Cos} B}{2}\right)} = \frac{y^2}{AB.\ x};$$

also
$$\frac{y^2}{AB.x} = \frac{2.\ (1-\operatorname{Cos} B^2)}{1+\operatorname{Cos} B}$$

$$= \frac{2.(1+\operatorname{Cos} B).(1-\operatorname{Cos} B)}{1+\operatorname{Cos} B}$$

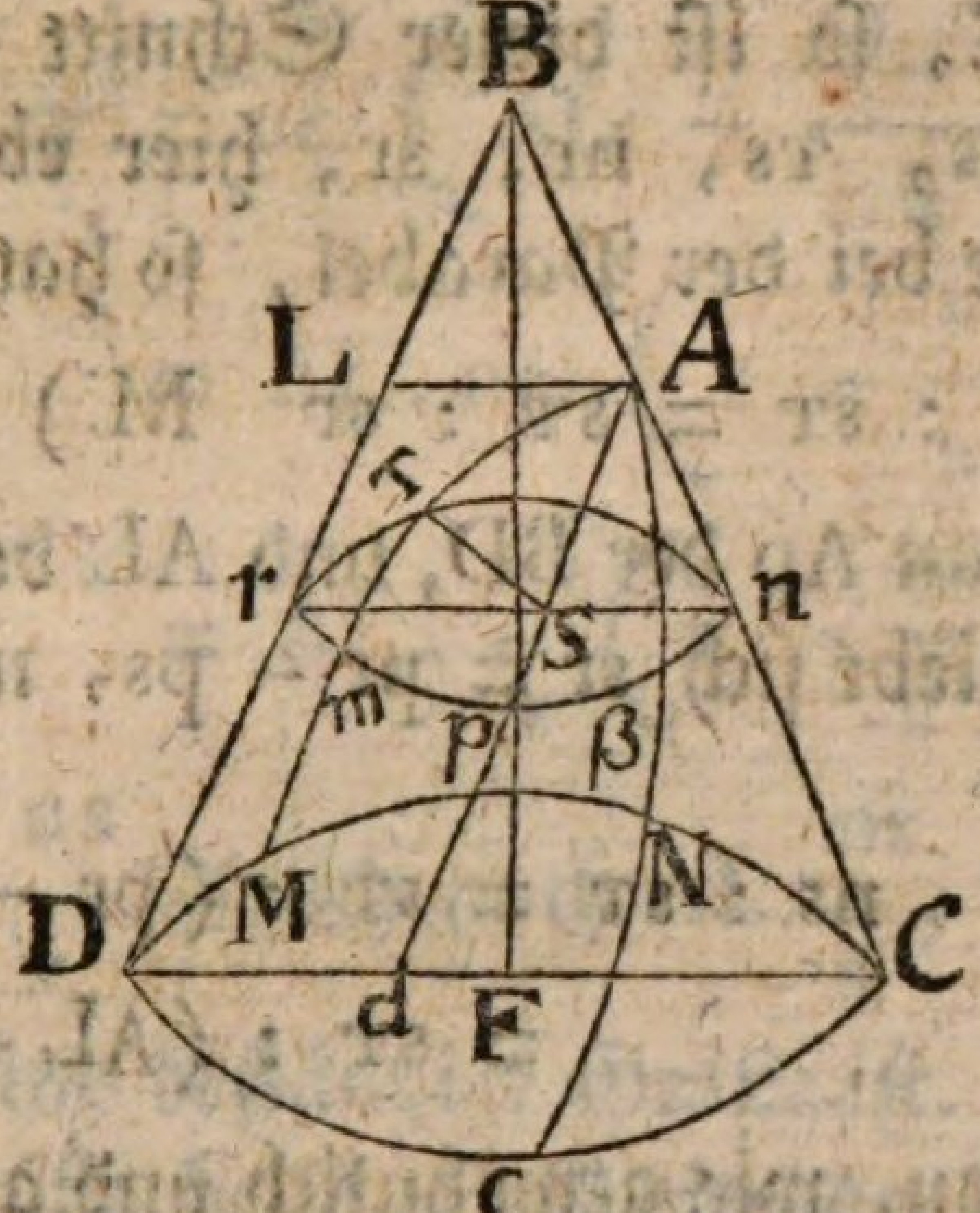
$$= 2.(1-\operatorname{Cos} B)$$

und daher
$$\operatorname{Cos} B = 1 - \frac{y^2}{2\ AB.\ x}$$

$$= \frac{2\ AB.\ x - y^2}{2\ AB.\ x}$$

Ex. Es sei AB = 4″, x = 3″, y = 2″, so ist Cos B $= \frac{2.\ 4.\ 3 - 4}{2.\ 4.\ 3} = \frac{20}{24} = 0{,}83333$ - - - - welches der Cosinus von 33° 35′; ist, also ist B = 33° 35′;

B



§. 362.

I.

CDFGHB sei ein senkrechter Kegel, BE seine Axe, und BCD ein solcher Durchschnitt, wie bei der Parabel, ein **Axentriangel**; senkrecht durch diesen Axentriangel lege man nach der Richtung Ad, so nämlich, daß dAC $> \alpha$, eine Ebene, so heißt die Linie dτAmd, worinn diese Ebene die Kegelfläche schneidet, eine **Ellipse**. Des Axentriangels und der schneidenden Ebene gemeinschaftliche Durchschnittslinie Ad heißt ihre **große Axe**, A ihr **Scheitel**, und AB will ich die Entfernung des Schnitts von des Kegels Spitze nennen.

II.

Eine Gleichung für die Ellipse zu finden.

Aufl. Es sei, wie bei der Parabel nτrm n ein Durchschnitt durch den Kegel senkrecht auf

seine Axe BE, so ist dieser Schnitt ein Kreis; haben nun ns, TS, nr, sr, hier eben die Bedeutung, wie bei der Parabel, so hat man

$$ns : sT = sT : sr \quad M.)$$

Nun ziehe man Ap der BD, und AL der nr gleichlaufend, so giebt sich sr = pr − ps, mithin wird aus M

$$ns : sT = sT : (pr - ps)$$
$$= sT : (AL - ps)$$

Es sei nun, wie gewöhnlich und auch im Buche angenommen wird, die große Axe Ad = a, so ist

$$a : Pd = As : ps$$

mithin
$$ps = \frac{As.\ Pd}{a}$$
$$= \frac{AL.\ As}{a}$$

und daher
$$ns : sT = sT \left(AL - \frac{AL.\ As}{a}\right)$$

und da hier s wieder, wo man will, liegen kann, und diese Gleichung doch ihre Richtigkeit behält, so läßt sie sich allgemein, wie bei der Parabel, so ausdrücken.

$$ns : y = y : \left(AL - \frac{AL\ .\ x}{a}\right)$$

also

also $$y^2 = ns. \left(AL - \frac{AL.\ x}{a}\right)$$

$$= AL.ns.\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

$$= AL.\frac{ns}{x}\left(x - \frac{x^2}{a}\right) \text{ N.})$$

wo AL und $\frac{ns}{x}$ folglich auch AL. $\frac{ns}{x}$, wie bei der Parabel, eine beständige Größe ist. Diese beständige Größe heißt auch hier der Parameter, und wird gewöhnlich mit dem Buchstaben b bezeichnet; dadurch verwandelt sich die Gleichung (N.) in die im Buche

$$y^2 = b\left(x - \frac{x^2}{a}\right)$$

III.

Da Bnr = 90° − ½ α, also sin Bnr = Cos ½ α, so ist Cos ½ α : x = sin dAn : ns nennt man also überhaupt den Winkel dAn, unter welchem der Kegel geschnitten wird, β, so erhält man

$$ns = \frac{\sin \beta.\ x}{\text{Cos } \frac{1}{2}\alpha}$$

Dieß in N gesetzt, giebt

$$y^2 = \frac{AL.\ x.\ \sin \beta}{x.\ \text{Cos } \frac{1}{2}\alpha}.\left(x - \frac{x^2}{a}\right)$$

 =

$$= \frac{AL. \sin \beta}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} \alpha} \left(x - \frac{x^2}{a} \right) \quad O.)$$

IV.

Statt O eine Gleichung zu erhalten, in der sich die AL nicht befindet, bestimme man AL durch AB und α. Es ist nämlich $\sin BCA = \sin Bnr = \operatorname{Cos} \frac{1}{2} \alpha$, also

$$\sin \alpha : AL = \operatorname{Cos} \frac{1}{2} \alpha : AB$$

also

$$AL = \frac{AB. \sin \alpha}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} \alpha};$$

welches in O gesetzt

$$y^2 = \frac{AB. \sin \alpha. \sin \beta}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} \alpha^2} \left(x - \frac{x^2}{a} \right)$$

giebt; oder wenn man die Entfernung des Schnitts von des Kegels Spitze AB allgemein c nennt, so hat man

$$y^2 = \frac{c. \sin \alpha. \sin \beta}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} \alpha^2} \left(x - \frac{x^2}{a} \right) \quad P.)$$

daß also

$$b = \frac{c. \sin \alpha. \sin \beta}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} \alpha^2}$$

V.

In den Gleichungen für die Ellipse $\beta = \alpha$ und $a = \infty$ gesetzt, giebt allemal eine Gleichung für die Parabel; so wird aus P diese

$y^2 =$

$$y^2 = \frac{c.\sin\alpha.\sin\alpha}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\alpha^2}\left(x - \frac{x^2}{\infty}\right)$$

$$= \frac{c.\ \sin\alpha^2}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\alpha^2}\ x$$

wie man für die Parabel in V. fand.

VI.

Aus einem gegebenen Kegel eine Parabel und Ellipse zu schneiden, so, daß beide einen Parameter haben.

Aufl. Hier aus IV. ist

$$b = \frac{c.\ \sin\alpha.\ \sin\beta}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\alpha^2};$$

und aus III. in 349.

$$a = \frac{AB.\ \sin\alpha^2}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\alpha^2};$$

Soll nun a = b seyn, so ist

$$\frac{AB.\ \sin\alpha^2}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\alpha^2} = \frac{c.\ \sin\alpha.\ \sin\beta}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\alpha^2}$$

oder

$$AB.\ \sin\alpha^2 = c.\ \sin\alpha.\ \sin\beta$$

folglich

$$AB.\ \sin\alpha = c.\ \sin\beta$$

und daher

$$AB = \frac{c.\ \sin\beta}{\sin\alpha};$$

 oder

oder auch $c = \frac{AB. \sin \alpha}{\sin \beta}$;

Schneidet man also aus dem Kegel (349.) in einem Punkt B in der Entfernung BA von des Kegels Spitze eine Parabel, und man will eine Ellipse aus dem Kegel schneiden, die mit der Parabel einerlei Parameter hat, so kann man β willkührlich annehmen, und den Kegel in einer Entfernung von seiner Spitze unter dem angenommenen Winkel β schneiden, die die vierte Proportionallinie zu $\sin \beta$, $\sin \alpha$, und AB ist.

VII.

Es ist die Axe a und ein Paar Coordinaten x, y, gegeben, man soll einen gegebenen Kegel unter einem gegebenen Winkel β so schneiden, daß man die diesen Stücken zugehörige Ellipse erhält, und sucht also c;

Aufl. Die Gleichung P in IV. giebt

$$c = \frac{y^2. \operatorname{Cos.} \frac{1}{2} \alpha^2}{\sin \alpha. \sin \beta. \left(x - \frac{x^2}{a}\right)}$$

Ex. Es sei $a = 8$, $x = 4$, $y = 2$, $\alpha = 50°$ und $\beta = 70°$, so ist

log

	$\log \mathrm{Cos}\, \tfrac{1}{2}\, \alpha$	=	9,9572757
also	$\log \mathrm{Cos}\, \tfrac{1}{2}\, \alpha^2$	=	19,9145514
Ferner	$\log \sin \alpha$	=	9,8842540
	$\log \sin \beta$	=	9,9729858
folglich	$\log (\sin \alpha . \sin \beta)$	=	19,8572398
und	$\log \left(\frac{\mathrm{Cos}\, \frac{1}{2}\, \alpha^2}{\sin \alpha . \sin \beta} \right)$	=	0,0573116

Die hierzu gehörige Zahl ist 1,141; also

$$c = 1{,}141 . \frac{y^2}{x - \frac{x^2}{a}}$$

$$= 1{,}141 . \tfrac{4}{2}$$

$$= 2{,}282;$$

VIII.

Es ist die Axe a nebst ein Paar Coordinaten x, y, gegeben, man soll die hierzu gehörige Ellipse aus einem Kegel unter einem gegebenen Winkel β und in einer gegebenen Weite c von des Kegels Scheitel schneiden; man sucht die Gestalt des hierzu erforderlichen Kegels oder seinen Scheitelwinkel α.

Aufl. Aus der Gleichung P. in IV. folgt

$$\frac{c . \sin \beta . \left(x - \frac{x^2}{a} \right)}{y^2} = \frac{\mathrm{Cos}\, \frac{1}{2}\, \alpha^2}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{1 + \mathrm{Cos}\, \alpha}{2 . \sin \alpha}$$

Folglich

Folglich

$$\frac{y^2 + y^2 . \operatorname{Cos} \alpha}{c . \sin \beta . \left(x - \frac{x^2}{a}\right)} = 2 \sin \alpha$$

und $$\sin \alpha = \frac{y^2 + y^2 . \operatorname{Cos} \alpha}{2c . \sin \beta . \left(x - \frac{x^2}{a}\right)}$$

oder $$\frac{y^2}{2c . \sin \beta . \left(x - \frac{x^2}{a}\right)} = d$$ gesetzt, giebt

$$\sin \alpha = d + d . \operatorname{Cos} \alpha ;$$

Diese Gleichung mit der in des Hrn. Aut. seinen astron. Abh. Ite Samml. Seite 13. No. 69. verglichen, giebt nach No. 73. und 76. a. a. O. folgendes.

Man nenne den Winkel, dessen $\sin = \frac{d}{\sqrt{(1+d^2)}}$ ist, p, und den Winkel, dessen Tangente = d ist, q; so ist

1.) $\alpha = p + q$;

2.) $\alpha = 180^\circ + q - p$;

Welcher von diesen beiden Werthen in jedem einzelnen Fall beibehalten werden müsse, entscheidet diese allgemeine Auflösung nicht, sondern muß jedesmal aus den besondern Umständen beurtheilt werden.

Er.

Ex. Es sei $a = 8$, $x = 4$, $y = 2$, $c = 2,282$, und $\beta = 70°$, so ist

$$2c.\left(x - \frac{x^2}{a}\right).\sin\beta = 2.\ 2{,}282.\ 2.\sin\beta$$
$$= 9{,}128.\ 0{,}9396926$$
$$= 8{,}577514$$

also $$\frac{y^2}{2c.\left(x - \frac{x^2}{a}\right).\sin\beta} = \frac{4}{8{,}577514}$$

oder $d = 0{,}4664$

und $d^2 = 0{,}217528$

mithin $\sqrt{(1 + d^2)} = 1{,}103$

Dieß giebt

$$\log\sqrt{(1 + d^2)} = 0{,}0425755$$
$$\log d = 0{,}6687585 - 1$$

folglich $$\log\frac{d}{\sqrt{(1 + d^2)}} = 0{,}6261830 - 1$$

Nun ist $0{,}6261830 = l\ 4{,}228$

wie man in den Tafeln findet,

und $1 = l\ 10$

also $$\frac{d}{\sqrt{(1 + d^2)}} = \frac{4{,}228}{10}$$
$$= 0{,}4228;$$

Diese Zahl gehört nun als Sinus dem Winkel $25°\ 1'$ in den Tafeln zu; da aber nicht alles in der Rechnung ganz genau, sondern an verschiedenen Orten etwas zu viel genommen worden, so kann man die einzelne Minute weglassen;

man

man hat also

$$p = 25^\circ$$

und die Zahl d = 0,4664 gehört als Tangente in den Tafeln den Winkeln 25°, daß also

$$q = 25^\circ$$

Dieß giebt zwei Werthe für α

1.) $\alpha = p + q = 25^\circ + 25^\circ = 50^\circ$;

2.) $\alpha = 180^\circ - 25^\circ + 25^\circ = 180^\circ$;

Der letzte findet aber hier nicht statt, also der erste, daß nämlich $\alpha = 50^\circ$, wie auch der angenommene Werth von c erfordert, der aus der Voraussetzung, daß $\alpha = 50^\circ$ ist, erfolgt (VII.)

IX.

Es ist die Axe und ein Paar Coordinaten gegeben, man soll aus einem Kegel, dessen Scheitelwinkel α bestimmt ist, in einer gegebenen Entfernung von seiner Spitze so schneiden, daß man die zu diesen Stücken gehörige Ellipse erhält, und sucht daher den Winkel β, unter dem man den Kegel schneiden muß.

Aufl. Aus P. in IV folgt

$$\sin\beta = \frac{y^2 . \operatorname{Cos} \frac{1}{2}\alpha^2}{c . \sin\alpha \left(x - \frac{x^2}{a}\right)}$$

Ex. Es sei a = 8, x = 4, y = 2, $\alpha = 50^\circ$, und c = 2,282, so ist

$$\sin\beta = \frac{4}{2,282 . 2} . \frac{\operatorname{Cos} \frac{1}{2}\alpha^2}{\sin\alpha};$$

Nun

Nun ist $= \frac{4}{4,564} \cdot \frac{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\alpha^2}{\sin\alpha}$

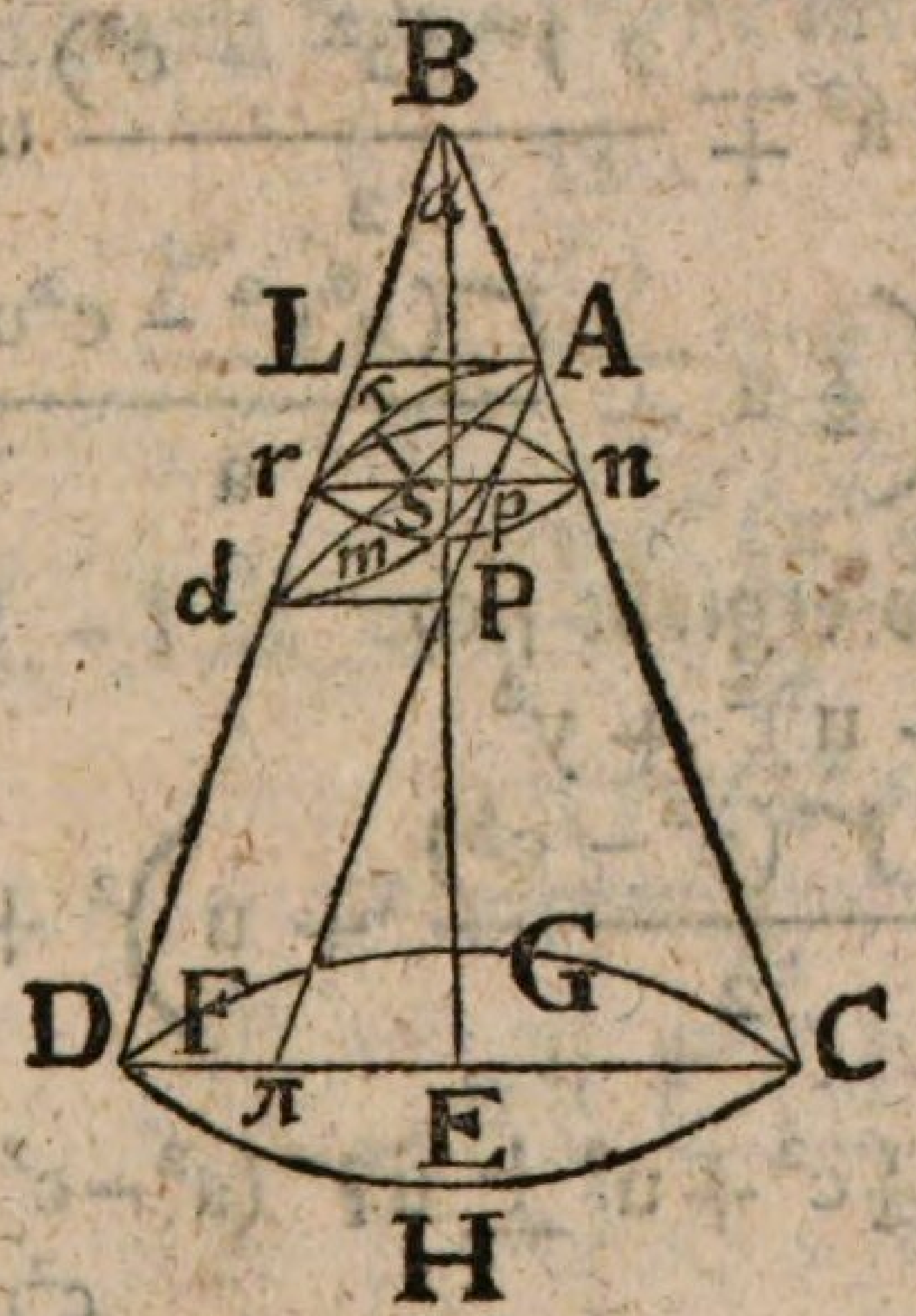
$$\begin{array}{lcr} \mathrm{l\,Cos}\,\frac{1}{2}\alpha^2 & = & 19,9145514 \\ \mathrm{l}\,\sin\alpha & = & 9,8842540 \\ \hline \text{Differ.} & = & 10,0302974 = \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{l}\;4 & = & 0,6020600 \\ \mathrm{l}\;4,564 & = & 0,6593456 \\ \hline \text{Differ.} & = & -0,0572856 = \mathrm{B} \end{array}$$

Folglich $\mathrm{l}\sin\beta = \mathrm{A} + \mathrm{B} = 9,9730118$

Diesen Logarithmen unter den Logarithmen der Sinusse in den Tafeln aufgesucht, giebt

$$\beta = 70°;$$

wie erfodert wird.



§. 378.

§. 378.

Nach der gemeinen Geometrie ist

$$FM^2 = PM^2 + FP^2$$
$$= PM^2 + (CF - CP)^2;\ (376.\ 368)$$
$$= (e - u)^2 + y^2;$$
$$= e^2 - 2eu + u^2 + y^2$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}c^2 - 2eu + u^2 + \tfrac{1}{4}c - \frac{c^2u^2}{a^2}$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2 - 2eu + \frac{a^2u^2 - c^2u^2}{a^2}$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2 - 2eu + \frac{a^2 - c^2}{a^2} . u^2$$

aber $e = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$,

folglich

$$FM^2 = \tfrac{1}{4}a^2 \mp \frac{2\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}u + \frac{a^2 - c^2}{a^2} . u^2$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}a \mp \frac{\sqrt{(a^2u^2 - c^2u^2)}}{a}\right)^2$$

Eben so ergiebt sich

$$fM^2 = (e + u)^2 + y^2$$
$$= \left(\frac{\pm\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2} + u\right)^2 + \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}c^2 + u^2 \pm u\sqrt{(a^2 - c^2)} + \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2 + u^2 \pm u\sqrt{(a^2 - c^2)} - \frac{c^2u^2}{a^2}$$

$$= \tfrac{1}{4}a^2$$

$$= \frac{1}{4}a^2 + u\sqrt{(a^2-c^2)} + \frac{a^2-c^2}{a^2}u^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}a \pm \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}\right)^2.$$

Man hat demnach

$$FM^2 = \left(\frac{1}{2}a \mp \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}\right)^2$$

$$fM^2 = \left(\frac{1}{2}a \pm \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}\right)^2$$

also $FM = \frac{1}{2}a \mp \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}$ P.)

$fM = \frac{1}{2}a \pm \frac{u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}$ Q.)

und $FM + fM = a$;

Die hier gehörig beobachteten Zeichen geben eben das, was man durch die Schlüsse im Buche erhält.

§. 381.

Es ist $\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{2} = e$ (376.)

also $fM - FM = \frac{2u\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}$

$$= \frac{4u\sqrt{(a^2-c^2)}}{2a}$$

$$= \frac{4u}{a}\,\frac{\sqrt{(a^2-c^2)}}{2}$$

$$= \frac{4ue}{a};$$

§. 378.

Nach der gemeinen Geometrie ist

$$FM^2 = PM^2 + FP^2$$
$$= PM^2 + (CF - CP)^2; \quad (376.\ 368)$$
$$= (e-u)^2 + y^2;$$
$$= e^2 - 2eu + u^2 + y^2$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}c^2 - 2eu + u^2 + \tfrac{1}{4}c - \frac{c^2u^2}{a^2}$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2 - 2eu + \frac{a^2u^2 - c^2u^2}{a^2}$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2 - 2eu + \frac{a^2 - c^2}{a^2}.\ u^2$$

aber $e = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$,

folglich

$$FM^2 = \tfrac{1}{4}a^2 \mp \frac{2\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}u + \frac{a^2 - c^2}{a^2}.\ u^2$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}a \mp \frac{\sqrt{(a^2u^2 - c^2u^2)}}{a}\right)^2$$

Eben so ergiebt sich

$$fM^2 = (e+u)^2 + y^2$$
$$= \left(\frac{\pm\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2} + u\right)^2 + \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}c^2 + u^2 \pm u\sqrt{(a^2 - c^2)} + \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2}$$
$$= \tfrac{1}{4}a^2 + u^2 \pm u\sqrt{(a^2 - c^2)} - \frac{c^2u^2}{a^2}$$

$= \tfrac{1}{4}a^2$

$$= \tfrac{1}{4} a^2 + u\surd(a^2-c^2) + \frac{a^2-c^2}{a^2} u^2$$

$$= \left(\tfrac{1}{2} a \pm \frac{u\surd(a^2-c^2)}{a}\right)^2$$

Man hat demnach

$$FM^2 = \left(\tfrac{1}{2} a \mp \frac{u\surd(a^2-c^2)}{a}\right)^2$$

$$fM^2 = \left(\tfrac{1}{2} a \pm \frac{u\surd(a^2-c^2)}{a}\right)^2$$

also $FM = \tfrac{1}{2} a \mp \frac{u\surd(a^2-c^2)}{a}$ P.)

$fM = \tfrac{1}{2} a \pm \frac{u\surd(a^2-c^2)}{a}$ Q.)

und $FM + fM = a$;

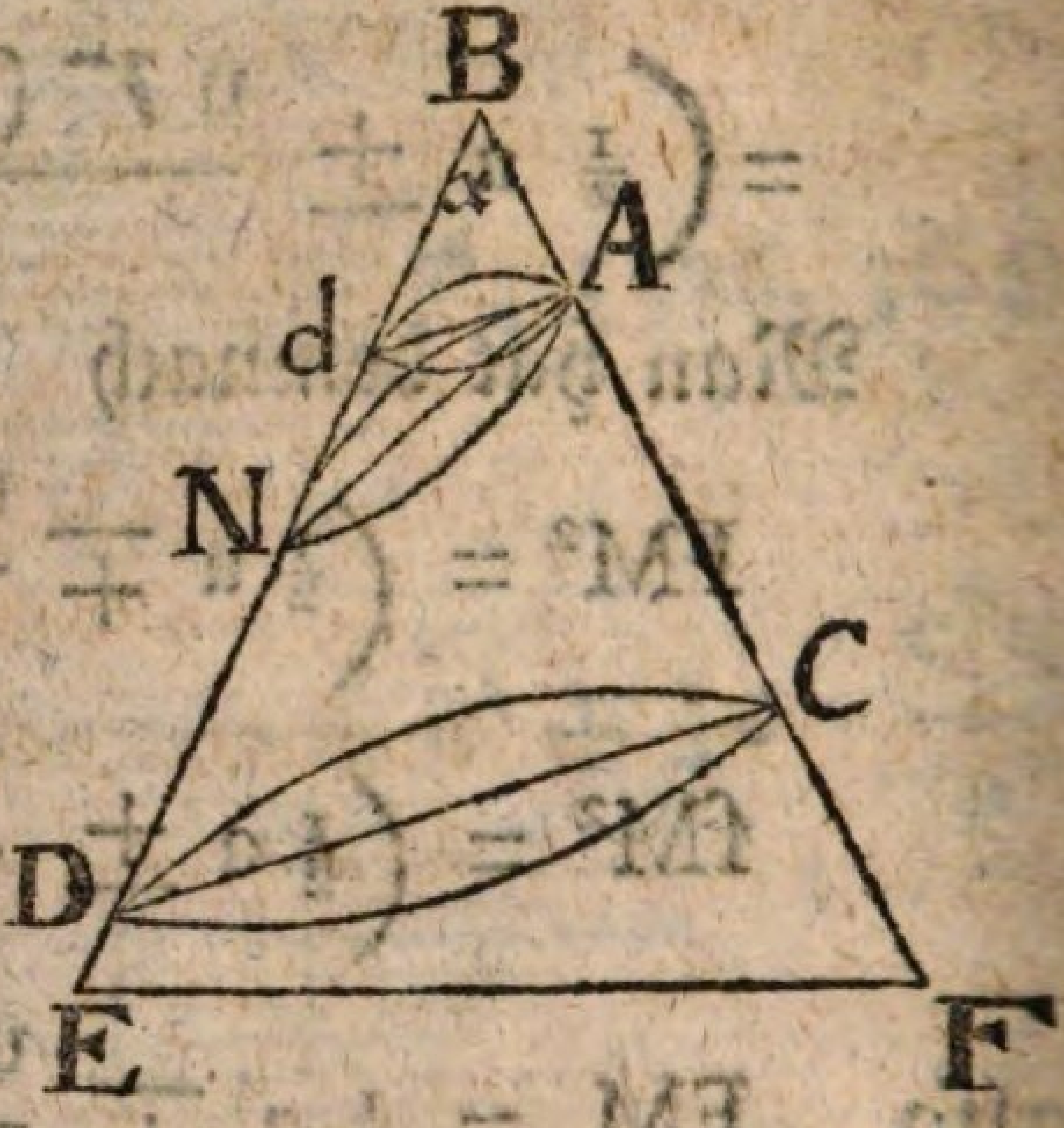
Die hier gehörig beobachteten Zeichen geben eben das, was man durch die Schlüsse im Buche erhält.

§. 381.

Es ist $\frac{\surd(a^2-c^2)}{2} = e$ (376.)

also
$$fM - FM = \frac{2u\surd(a^2-c^2)}{a}$$
$$= \frac{4u\surd(a^2-c^2)}{2a}$$
$$= \frac{4u}{a}\,\frac{\surd(a^2-c^2)}{2}$$
$$= \frac{4ue}{a};$$

§. 385.



Sollen also in dem Kegel BEF Schnitte nach Ad und CD ähnliche Ellipsen geben, so muß

$Ad : CD = b : \beta$

seyn, wenn die Parameter der zu Ad und CD gehörigen Ellipsen b, β, heißen. Nun ist

$$b : \beta = \frac{AB. \sin \alpha. \sin dAC}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} \alpha^2} : \frac{CB. \sin \alpha. \sin DCF}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} \alpha^2}$$

$= AB. \sin dAC : CB. \sin dCF$ aus 362. IV.

Folglich

Q.) $Ad : CD = AB. \sin dAC : CB. \sin dCF$; Nun gilt diese Gleichung für $dAC = DCF$; in diesem Fall verwandelt sie sich nämlich in diese

$Ad : CD = AB : CB$

wie richtig ist, weil in dem Fall in den beiden Dreiecken ABd, CBD alle Winkel gleich, folglich diese Dreiecke selbst einander ähnlich sind; demnach ist klar, daß alle Schnitte CD, Ad, die unter gleichen Winkeln $\beta > \alpha$ geschehen, ähnliche Ellipsen geben. Daß aber auch nur solche Schnitte ähnliche Ellipsen geben, erhellet so. AN, DC, seien elliptische Schnitte, so daß NAF in = DCF, so durchschneide man den Kegel nach der Richtung Ad, so, daß dAC = DCF, so ist eben erwiesen,

daß

daß die beiden Schnitte Ad, CD, ähnliche Ellipsen geben; sollen also CD und AN auch ähnliche Ellipsen seyn, so wären nothwendig auch AN und Ad unter sich ähnlich, welches nicht seyn kann, weil sonsten aus Q allemal

$$Ad : AN = AB. \sin dAC : AB. \sin NAC$$
$$= \sin dAC : \sin NAC$$

seyn müßte, welches offenbar falsch ist, und hieraus ist klar, daß auch die Voraussetzung, daß Schnitte, die unter ungleichen Winkeln NAC, DCF geschehen, ähnliche Ellipsen darstellen können, falsch sein müsse.

§. 389. Anm. (b)

Daraus folgt auch, wie die gemeine Geometrie schon lehrt, daß alle Kreise einander ähnlich sind, weil ihre Gleichung $y^2 = ax - x^2$ nur eine beständige Größe a enthält.

§. 389. Erkl.

I.

BDC sei wieder ein Axentriangel eines Kegels; senkrecht auf ihn werde nach der Richtung dA eine Ebene so gelegt, daß $dAC = \beta < \alpha$ ist, so heißt die krumme Linie $\nu\tau A\phi\psi$, worin die Ebene des Kegels Oberfläche schneidet die Hyperbel; aber offenbar ist das Stück $\nu\tau A\phi\psi$,

(b) Dieser und der folgende §. sind in der Ausgabe, der ich mich bediene, beide mit 389. bezeichnet, wie auch §. 721.

das sich so ergiebt, nicht die ganze Hyperbel, sondern man kann sich BC, BD und die schneidende Ebene nach beiden Seiten ober und unter B verlängert vorstellen, und es ist klar, daß man auf diese Art einen doppelten Kegel $\vartheta BCDB\zeta$ erhält, dessen beide Hälften $B\vartheta\zeta$, BDC sind, und dessen Axe eine einzige grade Linie εE ist. Wird nun die schneidende Ebene gehörig verlängert, so ist klar, daß die Hyperbel nicht nur in der untern Hälfte zweene Schenkel $A\nu$, $A\psi$ hat, die bis ins Unendliche fortgehen, sondern daß ihr außerdem noch zweene Schenkel am, $a\mu$, die sich gleichfalls unendlich weit hinausziehen, in der obern Hälfte zugehören, als welche nach der Richtung $d\delta$ gleichfalls so durchschnitten wird, daß $\delta a\zeta < \alpha$ wird, wie für den hyperbolischen Schnitt erfordert wird, weil sonsten der Schnitt entweder eine Parabel oder eine Ellipse gäbe. Die ganze Hyperbel hat demnach vier Schenkel $A\nu$, $A\psi$, am, $a\mu$, welches sich bei der Parabel und Ellipse anders verhält, weil da offenbar die schneidende Ebene des doppelten Kegels obere Hälfte nicht treffen kann.

Die grade Linie $dAa\delta$, in der die schneidende Ebene den doppelten Axentriangel trift, heißt der Hyperbel Durchmesser, und das Stück von ihm Aa, das zwischen den beiden Scheiteln der Hyperbel A, a, liegt, heißt die Zwergaxe auch schlechtweg Axe.

II. Eine

II.

Eine Gleichung für die Hyperbel zu finden.

Aufl. Man stelle sich durch irgend einen Punkt in Ad z. B. in 5. eine Ebene senkrecht durch den Axentriangel so gelegt vor, daß zugleich des Kegels Axe auf ihr senkrecht ist, so erhält man wie bei der Parabel und Ellipse einen Kreis, von dem nr ein Durchmesser seyn mag; sT sei die zu As gehörige senkrechte Ordinate, so ist sT auch zugleich die in dem Kreis zur Abscisse ns gehörige senkrechte Ordinate, und daher

$$ns : sT = sT : sr;$$

Durch A ziehe man die $A\pi$ der BD und AL der pr gleichlaufend, so ist $sr = sp + AL$, oder wenn man allgemein die AL mit g bezeichnet, so ist $sr = sp + g$, also $ns : sT = sT : (sp + g)$ P.)

Heißt die Zwergaxe Aa, a; so ergiebt sich

$$sp : sA = rp : Aa = g : a$$

weil Ap der aL gleichlaufend ist; daraus folgt

$$sp = \frac{g.\ sA}{a}$$

und dieses in P. gesetzt, giebt

$$ns : sT = sT : \left(\frac{g.\ sA}{a} + g\right)$$

oder, weil dieses offenbar allgemein ist,

$$ns : y = y : \left(\frac{g.\ x}{a} + g\right)$$

 also

also $$y^2 = ns.\, g\left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{ns}{x}.\, g.\left(x + \frac{x^2}{a}\right) \quad Q.)$$

wo sowohl g als $\frac{ns}{x}$ und daher auch $\frac{ns}{x}.g$ eine beständige Größe ist, die wie bei der Ellipse der Parameter heißt, und auch mit b bezeichnet wird, wodurch sich dann die Gleichung

$$y^2 = b\left(x + \frac{x^2}{a}\right) \quad R.)$$ ergiebt.

III.

Die Gleichung R. ist für bejahte Abscissen, die von A nach d zu genommen werden, richtig; da nun aber auch den verneinten Abscissen, die von A nach δ zu genommen werden, so bald sie größer als Aa sind, Ordinaten zugehören, wie aus der Figur klar ist, so muß man untersuchen, ob die Gleichung R auch für verneinte Abscissen gelte, und daher als eine allgemeine Gleichung für die Hyperbel angenommen werden könne. Man findet nämlich hier eben so, wie in 362. IV. für den Theil der Hyperbel $\nu A \psi$

$$b = \frac{AB.\ \sin \beta.\ \sin \alpha}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} \alpha^2};$$

$$= \frac{AB.\ \sin BAa.\ \sin \alpha}{\operatorname{Cos} \frac{1}{2} \alpha^2};$$

aber

aber AB. sin BAa ist, wie die Trigon. lehrt, das Perpendikel By, also

$$b = By. \frac{\sin\alpha}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha^2}$$

Auf eben die Art wird für den Theil maμ

$$b = \frac{aB. \sin ma\zeta. \sin\alpha}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha^2}$$

$$= \frac{aB. \sin BaA. \sin\alpha}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha^2};$$

wo wieder aB. sin BaA = By, also auch für diesen Theil der Hyperbel

$$b = By. \frac{\sin\alpha}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\alpha^2};$$

wie für den vorigen, oder b ist für beide Theile der Hyperbel völlig einerlei. Betrachtet man also den obern Theil der Hyperbel besonders, und nimmt die Abscissen in ihm von a aus, so gilt hier offenbar eben die Gleichung Q, die man auch für den untern fand; sollen aber alle Abscissen von A aus, die bejahten nach d zu, und die verneinten nach δ zu gerechnet werden, so muß offenbar jede verneinte Abscisse durch − (Aa + x) oder − (a + x) ausgedrückt werden, wenn die bejahten x heißen; setzt man also in (R) − (a + x) statt x, so ergiebt sich eine der Hyperbel zugehörige Gleichung für verneinte Abscissen, nämlich

 $y^2 =$

$$y^2 = b. \left(-a - x + \frac{a^2 + 2ax + x^2}{a}\right)$$

$$= b. \left(-a - x + a + 2x + \frac{x^2}{a}\right)$$

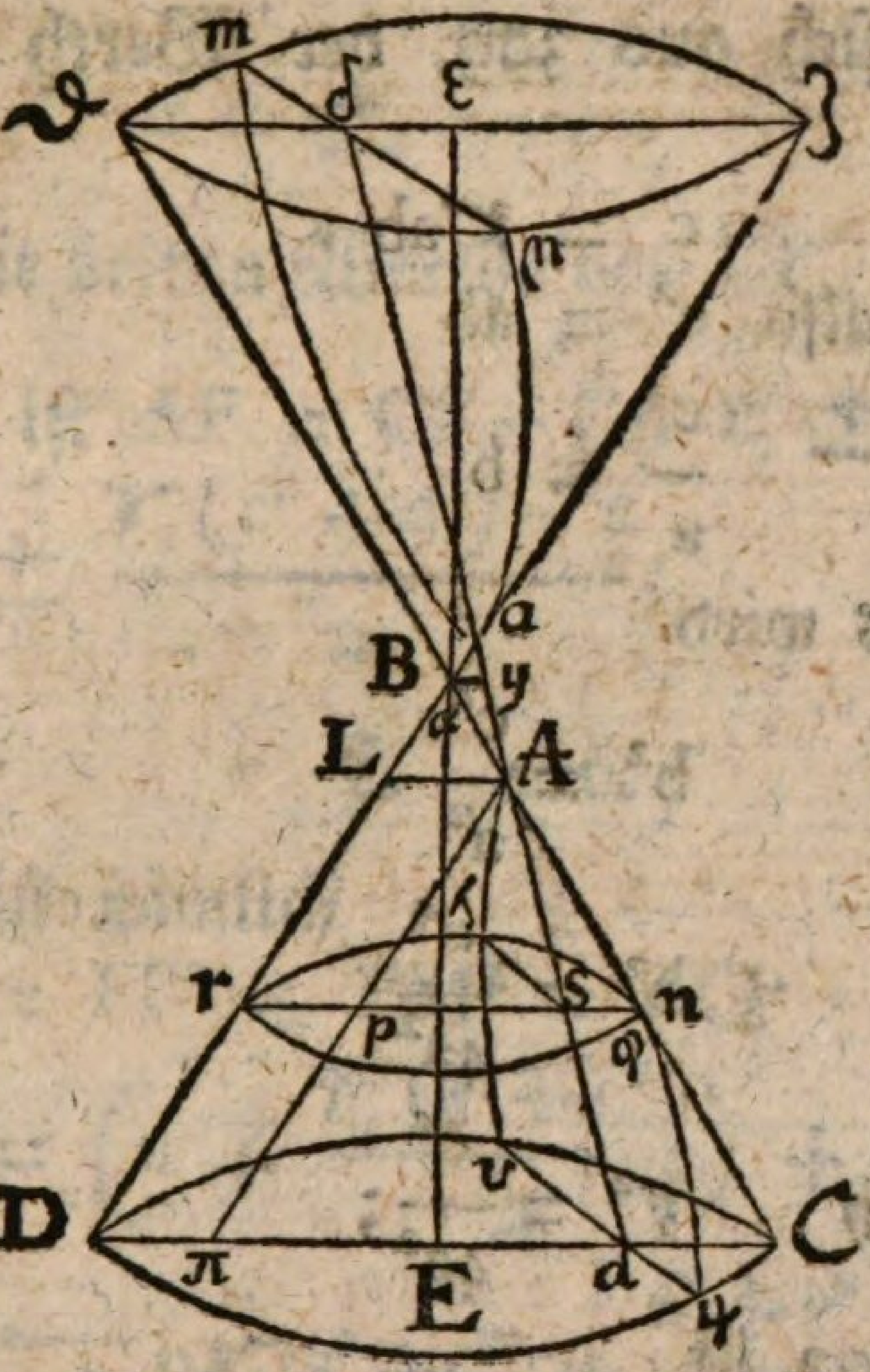
$$= b. \left(x + \frac{x^2}{a}\right)$$ völlig wie R.)

folglich ist R eine allgemeine Gleichung für die Hyperbel so wohl für bejahte als verneinte Abscissen.

IV.

Alles, was in (362 das. Anm.) von der Ellipse gesagt worden, läßt sich leicht auf die Hyperbel anwenden, wenn man nur statt des dortigen − a hier + a setzt, und kann daher hier übergangen werden. Uebrigens wird man mich entschuldigen, daß ich in Erklärung der drei Sätze (349. 362. 389) etwas weitläuftig gewesen bin, da es überhaupt schwer ist, den ersten Anfängern von diesen dreien ungemein brauchbaren Linien nur einen vollkommen deutlichen Begrif beizubringen.

§. 401.



§. 401.

Die kleine Axe in der Bedeutung genommen, daß sie die zu $-x = \frac{1}{2}a$ gehörige Ordinate seyn soll, ist hier bei der Hyperbel unmöglich, weil zu keinem Theil von a eine Ordinate gehört. Aber als eine grade aus dem Mittelpunkt C perpendikular aufgerichtete Linie CD, die zwischen a und b die mittlere Proportionallinie ist, läßt sie sich als möglich ansehen.

§. 405.

Für den Brennpunkt ist die Ordinate dem halben Parameter gleich, also ihr Qradrat $= \frac{1}{4}b^2$;

nun giebt sich aus 399. der Werth von $\frac{1}{4}b^2$, nämlich

$$c = \sqrt{ab}$$

also $$c^2 = ab$$

$$\frac{c^2}{a} = b$$

Daraus wird

$$b^2 = \frac{c^4}{a^2}$$

und daher $$\frac{1}{4}b^2 = \frac{c^4}{4a^2}$$

folglich auch $$y^2 = \frac{c^4}{4a^2};$$

aber aus 402. ist

$$y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$$

folglich, wenn man beide Werthe von y^2 gleich setzt,

$$\frac{c^4}{4a^2} = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2;$$

also $$\frac{c^2u^2}{a^2} = \frac{c^4}{4a^2} + \frac{1}{4}c^2;$$

oder wenn man durchaus mit $\frac{c^2}{a^2}$ dividirt,

$$u^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

folglich $u = \pm \frac{\sqrt{(c^2 + a^2)}}{2}$

welches die beiden Werthe von CF, Cf sind.

Nun ist $AF = CF - CA = \pm \frac{\sqrt{(c^2+a^2)}}{2}$
$- \frac{1}{2} a = \pm \frac{\sqrt{(c^2 + a^2)} - a}{2}$;

§. 406.

Es ist nämlich

$$FM^2 = FP^2 + PM^2 = (CP - CF)^2 + y^2$$
$$= \left(u \mp \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2}\right)^2 + y^2 \text{ (302. 305)}$$
$$= u^2 \mp u\sqrt{(a^2+c^2)} + \frac{a^2 + c^2}{4} + \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{c^2}{4}$$
$$= \left(\frac{c^2}{a^2} + 1\right) u^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{4} u. \mp \sqrt{(a^2+c^2)}$$
$$= \frac{c^2 + a^2}{a^2} . u^2 + \frac{1}{4} a^2 \mp u. \sqrt{(a^2 + c^2)}$$
$$= \left(\pm \frac{u. \sqrt{(a^2 + c^2)}}{a} - \frac{1}{2} a\right)^2$$

oder auch

$$= \left(\frac{u. \sqrt{(a^2 + c^2)}}{a} \pm \frac{1}{2} a\right)^2$$

und daher

$$FM = \frac{\pm u. \sqrt{(a^2 + c^2)}}{a} - \frac{1}{2} a \quad P.)$$

oder

oder $= \left(\frac{u.\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} \mp \frac{1}{2} a\right)$ Q.)

Eben so hat man

$$fM^2 = fP^2 + PM^2 = (CB + Cf)^2 + y^2$$

$$= \left(u \pm \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2}\right)^2 + \frac{u^2c^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$$

$$= u^2 \pm u.\sqrt{(a^2+c^2)} + \frac{a^2+c^2}{4} + \frac{u^2c^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$$

$$= \frac{a^2+c^2}{a^2}. u^2 + \frac{1}{4} a^2 \pm u.\sqrt{(a^2+c^2)}$$

$$= \left(\pm \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} + \frac{1}{2} a\right)^2 \text{ oder}$$

$$= (u\sqrt{(a^2+c^2)} \pm \frac{1}{2} a)^2$$

Folglich

$$fM = \pm \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} + \frac{1}{2} a \quad p.)$$

oder

$$= \frac{u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} \pm \frac{1}{2} a \quad q.)$$

wo p und P, q und Q zusammengehören; daraus ergiebt sich nun 1.) aus P und p

$$fM - FM = \left(\frac{\pm u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} + \frac{1}{2} a\right)$$

$$- \left(\frac{\pm u\sqrt{(a^2+c^2)}}{a} - \frac{1}{2} a.\right)$$

$$= \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} a = a$$

2.) aus

2.) aus Q und q

$$fM - FM = \left(\frac{u. \sqrt{(a^2 + c^2)}}{a} \pm \tfrac{1}{2} a\right) - \left(\frac{u \sqrt{(a^2 + c^2)}}{a} \mp \tfrac{1}{2} a\right)$$

$$= \pm a$$

daß also allemal der Unterschied beider Linien fM, FM, = a ist; ist nämlich fM > FM, so ist fM − FM = + a, aber für fM < FM wird fM − FM = − a;

§. 408.

Es sei nämlich aus dem Mittelpunkt der Hyperbel C eine grade Linie Cλ neben der Hyperbel so hergezogen, daß die in A auf der Axe senkrecht stehende Linie AE der halben kleinen Axe gleich ist, so ist

$$LP : CP = AE : AC = \tfrac{1}{2} c : \tfrac{1}{2} a$$

oder wenn LP, z; CP, u heißt, so wird

$$z : u = \tfrac{1}{2} c : \tfrac{1}{2} a = c : a$$

also $$za = cu,$$

und $$z = \frac{cu}{a}$$

Nun ist aus 402. $y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$, oder

$$\frac{c^2u^2}{a^2} - y^2 = \tfrac{1}{4} c^2 = z^2 - y^2 = (z + y). (z - y)$$

folglich $$\frac{z^2 - y^2}{z + y} = (z - y) = LM = \frac{c^2}{4(z + y)};$$

§. 410.

§. 410.

Es ist nämlich $PL = Pl$, also auch $z = Pl$, also $Ml = MP + Pl = y + z$; nun ist $LM = \frac{c^2}{4(z+y)}$ (408.) folglich

$$LM. Ml = (y + z). \frac{c^2}{4(z+y)} = \tfrac{1}{4} c^2;$$

§. 411.

Die Absicht dieses Zusatzes ist eine Gleichung für die Hyperbel aus Coordinaten zu finden, da die Abscissen auf einer Asymptote von C ausgenommen werden, und die Ordinaten von dem Endpunkt der Abscissen bis an den Schenkel der Hyperbel mit der Asymptote des andern Schenkels parallel geht. Eine solche Gleichung zu finden, nehme man auf $C\lambda$ eine Abscisse z. B. CQ und die zugehörige Ordinate QM, und suche aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke LQM, LCl, allgemeine Ausdrücke sowohl für CQ als QM auf folgende Art. Es ist $CQ : Ml = LQ : LM = EC : Ee$, also

$$CQ = \frac{EC. Ml}{Ee} \quad M.)$$

Nun ist $EC = \sqrt{(AC^2 + AE^2)}$

$$= \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 + \tfrac{1}{4} c^2)} \text{ oder}$$

$$EC = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2}$$

Ferner

Ferner $Ml = y + z$ (410.)

und $Ee = 2Ae = c$

Diese Werthe von EC, Ml, Ee in M substituirt, giebt

$$CQ = \frac{(y+z).\sqrt{(a^2+c^2)}}{2c} \quad O.)$$

Eben so ergiebt sich der Werth von MQ; es ist nämlich $Ee : eC = LM : MQ$, also

$$MQ = \frac{eC.\ LM}{Ee} \quad N.)$$

Da nun $eC = EC = \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2}$

$$LM = \frac{c^2}{4\ (z+y)}$$

und $Ee = c$;

so wird aus N, diese Werthe daselbst substituirt,

$$MQ = \frac{\frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2} . \frac{c^2}{4\ (z+y)}}{c}$$

$$= \frac{c^2}{4(z+y)} . \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2c}; \quad P.)$$

Auf diese Art hat man in O und P einen allgemeinen Ausdruck für jedes Paar Coordinaten, woraus man dann die gesuchte Gleichung herleiten kann. Offenbar gilt es gleichviel, was man für eine Gleichung aus O und P herleitet, wenn sie nur CQ und QM so enthält, wie die Gleichung 389. die x und y, oder die Gleichung 402.

die

die u und y enthält, daß nämlich außer der Coordinaten CQ und QM auch in ihr weiter keine veränderliche Größen vorkommen, und dieß erhält man nun hier durch die Multiplication am bequemsten. Nämlich

$$CQ.QM = \frac{(z+y).\sqrt{(a^2+c^2)}}{2c} . \frac{c^2}{4(z+y)} . \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2c}$$

$$= \frac{c^2.\ (z+y).}{16c^2(z+y)} . \sqrt{(a^2+c^2)} . \sqrt{(a^2+c^2)}$$

$$= \frac{a^2+c^2}{16}$$

§. 413.

Daß $CI^2 = \frac{a^2+c^2}{16}$ erhellet auch ohne die vorigen Sätze so: man stelle sich vor, aus dem Punkt I wäre auf die Linie AC eine andere Ip senkrecht gezogen, so wäre $Cp = Ap = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{4} a$, weil $CI = AI$; und $IP = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{4} c$, weil $AE : pI = CA : Cp = 2 : 1$. Nun ist $CI^2 = Cp^2 + pI^2$, also, wenn man die vorigen Werthe substituirt

$$CI^2 = \tfrac{1}{16} a^2 + \tfrac{1}{16} c^2 = \frac{a^2+c^2}{16};$$

§. 416.

Durch den Asymptotenwinkel RC ꝛc. ist die Verhältniß der Axen gegeben. Denn wenn ihn CP halbirt, und CA für die halbe große Axe angenom-

genommen wird, so ist AE die halbe kleine (408); soll $C\alpha$ die halbe große seyn, so ist $\alpha\varepsilon$ die halbe kleine, und

$$CA : AE = C\alpha : \alpha\varepsilon;$$

wodurch die Verhältniß der Axen, nicht sie selbst gegeben ist. Nähme man eine Abscisse von C aus, z. B. CP, so wären die Quadrate der Ordinaten vermöge (402) für die Hyperbel

1.) durch A, $\frac{AE^2}{CA^2} \cdot CP^2 - AE^2$;

2.) durch α, $\frac{\alpha\varepsilon^2}{C\alpha^2} \cdot CP^2 - \alpha\varepsilon^2$;

Nun ist $\frac{AE}{CA} = \frac{\alpha\varepsilon}{C\alpha}$, und $AE < \alpha\varepsilon$, folglich wird in (1.) von eben der Größe weniger abgezogen als in (2.), oder das Quadrat der Ordinate in der ersten Hyperbel ist allemal größer als in der zweiten, und die zweite wird also von der ersten ganz eingeschlossen, und kann in diesem Betracht kleiner als die erste heißen, indessen sind beide einander ähnlich, weil eben das für sie gilt, was 385. von der Ellipse gesagt worden; also giebt der Asymptotenwinkel eine Reihe ähnlicher Hyperbeln (specie datarum).

Wenn, für $r = 1$, tang $\frac{1}{2}$ RC $p = n$, so ist $\frac{c}{a} = \frac{AE}{CA} = n$, oder $c = na$; da also CD, MD, als gegeben angenommen werden, so ist

$$CD.\ MD = \frac{a^2 + c^2}{16}$$

$$= a^2 . \left(\frac{1 + \frac{c^2}{a^2}}{16} \right)$$

$$= a^2 . \left(\frac{1 + n^2}{16} \right)$$

daher

$$\sqrt{CD.\ MD} = \frac{a . \sqrt{(1 + n^2)}}{4}$$

und $$a = \frac{4 . \sqrt{CD.\ MD}}{\sqrt{(1 + n^2)}};$$

auch $$c = an = \frac{4n \sqrt{CD.\ MD}}{\sqrt{(1 + n^2)}};$$

Man setze $\frac{1}{2}$ RCp = k, also n = tang k, und $\sqrt{(1 + n^2)}$ = sec k, so ist

$$a = \frac{4 \sqrt{CD.\ MD}}{\sec\ k}$$

$$= 4 . \operatorname{Cos} k . \sqrt{CD.\ MD} \quad P.)$$

eben so $$c = \frac{4 . \operatorname{tang} k . \sqrt{CD.\ MD}}{\sec\ k}$$

$$= 4 . \sin k . \sqrt{CD.\ MD}. \quad Q.)$$

Diese Formeln P, Q, dienen zu bequemer Berechnung der Axen aus dem Asymptotenwinkel und CD, DM;

Ex. Der Asymptotenwinkel sei 30°, also k = 15°, CD sei = 25, MD = 4, also CD. DM = 100,

100, und $\sqrt{}$ CD. DM = $\sqrt{}$ 100 = 10, so ist a = 4. Cos 15°. 10, und c = 4. sin 15°. 10.

Also, weil man hier die Sinus auf den Halbmesser r = 1 bringen muß, a = 4. 10. 0,96592 und c = 4. 10. 0,25882, oder

$$a = 38,6368$$

und $$c = 10,3528$$

Wollte man mit Logarithmen rechnen, so müßte man log tab. sin k für r = 1 berechnen, und dieß sähe hier so aus:

log 40 = 1,6020600
log tab. Cos k = 9,9849438, und hiervon log tab. rad = 10 abgezogen, giebt
log a = 1,5870038
Demnach a = 38,64 - - - -
Eben so log 40 = 1,6020600
log tab. sin k = 9,4129962 log tab. rad = 10. abgezogen,
giebt log c = 1,0150562
also c = 10,36 - - - -

Den Parameter $\frac{c^2}{a}$ (399.) findet man hier so:

log c² = 2 log c = 2,0301124
log a = 1,5870038
log b = 0,4431086
also b = 2,774 - - - -

Wenn CD und DM nicht so kleine Zahlen, und ihr Produkt keine Quadratzahl wäre, so fände

man die Sache noch bequemer so: man nähme $\frac{1}{2}$ (log CD + log DM), welches log $\sqrt{CD.DM}$. und addirte dazu log 4, so wäre

$$\log a = \log 4 + \tfrac{1}{2}(\log CD + \log DM) + \log \text{ tab. } \cos k - 10$$

$$\log c = \log 4 + \tfrac{1}{2}(\log CD + \log DM) + \log \text{ tab. } \sin k - 10$$

und daraus gäbe sich log b = 2 log c − log a;

Wüßte man a und c, so ließe sich daraus der Asymptotenwinkel = 2k so berechnen:

$$\tan k = \frac{c}{a}, \text{ also}$$

$$\tan 2k = \frac{2\frac{c}{a}}{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \frac{a^2 . \frac{2c}{a}}{a^2 - c^2}$$

$$= \frac{2ac}{a^2 - c^2} = \frac{2ac}{(a + c) . (a - c)}$$

Folglich

$$\log \tan 2k = l2 + la + lc - (l(a+c) + l(a-c))$$

Dieses ist aber log tang 2k für r = 1, und wenn man ihn um 10. vermehrt, so giebt sich log tab. tang 2k, daß man also dadurch 2k in den Tafeln findet.

Man könnte auch so sagen

$$\log \text{ tab. } \tan k = 10 + \log c - \log a$$

und alsdann k verdoppeln. Aber weil man bei dem gewöhnlichen Gebrauch der Tafeln k nur

zwischen Gränzen, die um 1′ unterschieden sind, finden würde, so wüßte man dergestalt 2k nur zwischen 2′, und auf die vorige Art findet man es zwischen 1′, welches den Nutzen solcher Formeln, wie Trig. 19. S. zu schärferer Rechnung zeigt.

§. 419.

Eine Gleichung für eine Linie heißt eine Gleichung zwischen x, y, und beständigen Größen (335.), wo x und y Abscissen und Ordinaten vorstellen. Der Grad einer Gleichung wird allemal nach der Menge der **Dimensionen**, d. h. der veränderlichen Factoren desjenigen Glieds beurtheilt, das deren die meiste hat. Befindet sich demnach in einer Gleichung ein Glied von n Dimensionen, und keins, das mehrere hat, so ist die Gleichung vom nten Grad. Es können aber in einer Gleichung vom nten Grad noch Glieder von niedrigern Abmessungen, als von n, und überdas solche Glieder, die gar keine Abmessungen haben, vorkommen. Also sind alle Glieder, die in einer Gleichung vom nten Grad vorkommen können, diese: Glieder von n, von $n-1$, $n-2$, $n-3$ - - - - $n-(n-1)$ und $n-n$ Dimensionen; in einer Gleichung vom zweeten Grad sind also alle mögliche Glieder folgende: Glieder von zwoen, von einer, und gar keiner Dimension. In ihr sind nämlich drei Glieder von zwoen Dimensionen möglich: y^2, xy, und x^2,

zwei Glieder von einer Dimension: x und y, und Glieder von keiner Dimension, die weder x noch y oder x^0 und y^0 enthalten. Drückt man nun diese Glieder mit beständigen Größen verbunden aus, so erhält man

$$ax^0 + bx^0 + \beta x^1 + \gamma y^1 + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 = 0$$

oder $(a + b) + \beta x^1 + \gamma y^1 + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 = 0$ oder statt der Summe der beständigen Größen $a + b$ einen einzigen Buchstaben α gesetzt, giebt die allgemeine Gleichung für Linien vom zweeten Grad im Buche. In dieser Gleichung können nun auch Glieder verneint seyn, wenn gleich hier überall das Zeichen + gesetzt worden, in solchem Fall sind nämlich die Coefficienten verneint, auch können Glieder von ihrem Coefficienten befreit seyn, wenn β, γ, δ - - - = 1 werden, oder ganz wegfallen, wenn ihre Coefficienten = 0 werden.

§. 420.

Aus 419. ergiebt sich die Gleichung für die grade Linie, wenn man die Coefficienten der Glieder von zwoen Dimensionen = 0 setzt, dadurch erhält man nämlich

$$\alpha + \beta x + \gamma y = 0$$

welche mit der 340 einerlei ist, wenn man daselbst $-1 = \gamma$, $\frac{b}{a} = \beta$ und $c = \alpha$ setzt.

§. 422.

Wenn man für die krumme Linie GNMH zwischen Abscissen, die auf CP von A aus genommen

men werden, und Ordinaten, die auf dieser Abscissenaxe unter einem Winkel APM = π stehen, eine Gleichung, wie die 419, hat, und es wird nun eine andere Abscissenaxe CQ gegeben, auf der die Abscissen von B an und die Ordinaten unter einem gegebenen Winkel CQM genommen werden sollen, so läßt sich aus der Gleichung 419. für die vorige Abscissenaxe und Ordinatenwinkel eine für die neue Abscissenaxe und den neuen Ordinatenwinkel auf folgende Art finden.

I. Auf CP sind die Punkte C und A gegeben, denn C ist der Punkt, wo die Abscissenlinien BQ, AT, rückwärts gehörig verlängert, einander schneiden, und A ist der Anfang der Abscissen auf CT (419.); folglich ist AC = f gegeben. Da ferner auch B als der Anfang der Abscissen auf der neuen Abscissenaxe CQ gegeben ist, so ist auch CB, die g heissen soll, bekannt. Es ist überdas CTQ oder $T = 2R - \gamma - k$, und $\mu = 2R - MPT - MTP$; aber $MPT = 2R - MPA = 2R - \pi$, und $MTP = 2R - T$, folglich $\mu = 2R - (2R - \pi) - (2R - T) = \pi - (2R - T)$. Nun ist $T = 2R - \gamma - k$, folglich $\mu = \pi - (2R - 2R + \gamma + k) = \pi - \gamma - k$;

II. Es ist ferner $PT : PM = \sin \mu : \sin PTM$, da nun $\sin PTM = \sin PTQ$, so ist $PT : PM = \sin \mu : \sin T$, und $PT = \frac{PM. \sin \mu}{\sin T} = \frac{y. \sin \mu}{\sin T}$;

 ferner

ferner hat man $CQ = CB + BQ = g + t$, und $CT : CQ = \sin k : \sin T$, mithin $CT = \frac{CQ. \sin k}{\sin T}$ $= AC + AP + PT = f + x + PT$; da nun PT $= \frac{y. \sin \mu}{\sin T}$, so folgt weiter

$$\text{III. } CT = f + x + \frac{y. \sin \mu}{\sin T} = \frac{(g + t). \sin k}{\sin T},$$

weil $CQ = g + t$;

IV. Weil ferner $MT : PM = \sin MPT : \sin MTP = \sin \pi : \sin T$, so folgt

$$MT = \frac{PM. \sin \pi}{\sin T}$$

$$= \frac{y. \sin \pi}{\sin T}$$

überdas $TQ : CT = \sin \gamma : \sin k$

folglich $TQ = \frac{CT. \sin \gamma}{\sin k}$,

da nun $MT + TQ = u$, so hat man weiter

$$\text{V. } u = MT + TQ = \frac{y. \sin \pi}{\sin T} + \frac{CT. \sin \gamma}{\sin k};$$

$$= \frac{y. \sin \pi}{\sin T} + \frac{(g + t). \sin k. \sin \gamma}{\sin T. \sin k} \text{ (III.)}$$

$$= \frac{y. \sin \pi}{\sin T} + \frac{(g + t). \sin \gamma}{\sin T};$$

Aus

Aus dieser Gleichung läßt sich nun x und y durch Werthe, welche t und u enthalten, bestimmen, und folglich dadurch die gesuchte Gleichung zwischen t und u angeben; denn aus der Gleichung hier in V. folgt

$$\text{VI.}\quad y.\sin\pi + (g+t)\sin\gamma = u.\sin T.$$

und $$y.\sin\pi = u.\sin T - (g+t).\sin\gamma,$$

folglich $$y = \frac{u.\sin T - (g+t).\sin\gamma}{\sin\pi};$$

sucht man nun den Werth von x aus III. und vergleicht den gefundenen Werth mit VI. so findet man

$$\text{VII.}\quad x = \frac{(g+t).\sin k}{\sin T} - \frac{y.\sin\mu}{\sin T} - f;$$

$$= \frac{(g+t).\sin k}{\sin T} - \frac{(u.\sin T-(g+t).\sin\gamma).\sin\mu}{\sin\pi.\sin T} - f$$

Setzt man nun diese in VI. und VII. gefundene Werthe in die Gleichung 419. so erhält man

$$\text{VIII.}\quad \alpha + \beta\left(\frac{(g+t).\sin k}{\sin T} - \frac{(u.\sin T - (g+t).\sin\gamma).\sin\mu}{\sin\pi.\sin T} - f.\right)$$

$$+\gamma.\left(\frac{u.\sin T - (g+t).\sin\gamma}{\sin\pi}\right) + \delta$$

$$\left(\frac{(g+t).\sin k}{\sin T} - \frac{(u.\sin T-(g+t).\sin\gamma).\sin\mu}{\sin\pi.\sin T} - f\right)^2$$

$$+\varepsilon\left(\frac{(g+t).\sin k}{\sin T}-\frac{(u.\sin T-(g+t).\sin\gamma).\sin\mu}{\sin\pi.\sin T}-f\right).$$
$$\left(\frac{u.\sin T-(g+t).\sin\gamma}{\sin\pi}\right)+\zeta\left(\frac{u.\sin T-(g+t).\sin\gamma}{\sin\pi}\right)^2$$
$= 0$; eine Gleichung zwischen t und u;

§. 427.

Es wird wenigstens Anfängern zur Uebung im Rechnen dienen, wenn die Rechnung hier etwas weiter ausgeführt wird. Man setze demnach in den fünf Gleichungen im Buche $\frac{\alpha}{\zeta} = -a$, $\frac{\beta}{\zeta} = -b$, $\frac{\gamma}{\zeta} = -c$, $\frac{\delta}{\zeta} = -d$, und $\frac{\varepsilon}{\zeta} = -e$, so erhält man

I. $a+b.AP+c.PM+d.AP^2+e.AP.PM=PM^2$;
II. $a+b.AP+c.PN+d.AP^2+e.AP.PN=PN^2$;
III. $a+b.AI+c.IF+d.AI^2+e.AI.IF=IF^2$;
IV. $a+b.AS+c.SG+d.AS^2+e.AS.SG=SG^2$;
V. $a+b.AL+c.LH+d.AL+e.AL.LH=LH^2$;

Aus diesen schaffe man a weg, so erhält man

1.) $PM^2-C.PM-e.AP.PM=PN^2-c.PN-e.AP.PN$

2.) $PN^2-b.AP-c.PN-d.AP^2-e.AP.PN$ $=IF^2-b.AI-c.IF-d.AI^2-e.AI.IF$

3.) $IF^2-b.AI-c.IF-d.AI^2-e.AI.IF=SG^2-b.AS-c.SG-d.AS^2-e.AS.SG$;

4) SG^2

4.) $SG^2 - b.AS - c.SG - d.AS^2 - e.AS.SG = LH^2 - b.AL - c.LH - d.AL - e.AL.LH$;

Hieraus b gesucht, giebt aus 2. 3. und 4.

1.) $(PN^2 - c.PN - d.AP^2 - e.AP.PN - IF^2 + c.IF + d.AI^2 + e.AI.IF) : (AP - AI) = (IF^2 - c.IF - d.AI^2 - e.AI.IF - SG^2 + c.SG + d.AS^2 + e.AS.SG) : (AI - AS)$

2.) $(IF^2 - c.IF - d.AI^2 - e.AI.IF - SG^2 + c.SG + d.AS^2 + e.AS.SG) : (AI - AS) = (SG^2 - c.SG - d.AS^2 - e.AS.SG - LH^2 + c.LH + d.AL^2 + e.AL.LH) : (AS - AL)$

Hieraus nun und aus der ersten der vorigen vier Gleichungen folgt

1.) $$\frac{PM^2 - PN^2 + e.AP.(PN - PM)}{PM - PN} = c;$$

2. $$\frac{PN^2 - d.AP^2 - e.AP.PN - IF^2 + d.AI^2 + e.AI.IF}{(AP - AI).\left(\frac{SG - IF}{AI - AS} + \frac{PN - IF}{AP - AI}\right)} + \frac{d.AI^2 - IF^2 + e.AI.IF + SG^2 - d.AS^2 - e.AS.SG}{(AI - AS)\left(\frac{SG - IF}{AI - AS} + \frac{PN - IF}{AP - AI}\right)} = c;$$

3.) $$\frac{IF^2 - d.AI^2 - e.AF.IF - SG^2 + d.AS^2 + e.AS.SG}{(AI - AS).\left(\frac{IF - SG}{AI - AS} + \frac{LH - SG}{AS - AL}\right)} + \frac{d.AS^2 - SG^2 + e.AS.SG + LH^2 - d.AL^2 - e.AL.LH}{(AS - AL).\left(\frac{IF - SG}{AI - AS} + \frac{LH - SG}{AS - AL}\right)} = c;$$

Dieß

Dieß giebt nun, wenn man den Nenner des ersten Glieds in No. 2. $= \alpha$ und des zweiten Glieds $= \beta$ setzt,

$$\left[\frac{PM^2 - PN^2 + e.\,AP.\,(PN - PM)}{PM - PN} + \frac{e.\,AP.\,PN + IF^2 - PN^2 - e.\,AI.\,IF}{\alpha} + \left(\frac{IF^2 - e.\,AI.\,IF - SG^2 + e.\,AS.\,SG}{\beta}\right)\right] : \left(\frac{AI^2 - AP^2}{\alpha} + \frac{AI^2 - AS^2}{\beta}\right) = d;$$

Eben so in No. 3. des ersten Glieds Nenner γ des zweiten δ genennt, giebt aus 1. und 3.

$$\left(\frac{PM^2 - PN^2 + e.\,AP.\,(PN - PM)}{PM - PN} + \frac{e.\,AI.\,IF - IF^2 + SG^2 - e.\,AS.\,SG}{\gamma} + \frac{SG^2 - e.\,AS.\,SG - LA^2 + e.\,AL.\,LH}{\delta}\right) : \left(\frac{AS^2 - AI^2}{\gamma} + \frac{AS^2 - AL^2}{\delta}\right) = d;$$

Es sei nun der Kürze wegen

$$\frac{AI^2 - AP^2}{\alpha} + \frac{AI^2 - AS^2}{\beta} = \varepsilon$$

und

$$\frac{AS^2 - AI^2}{\gamma} + \frac{AS^2 - AL^2}{\delta} = \zeta$$

so folgt aus den beiden Werthen für d endlich

$$e = \left(\frac{(PM + PN)\alpha + IF^2 - BN^2}{\alpha\varepsilon} + \frac{IF^2 - SG^2}{\beta\varepsilon} + \right.$$

$$+\frac{IF^2 - SG^2 - (PM + PN).\ \gamma}{\gamma\zeta} + \frac{LH^2 - SG^2}{\delta\zeta}\Big) :$$

$$\Big(\frac{AI.\ IF - AP.\ PN + \alpha.\ AP}{\alpha\varepsilon} + \frac{AI.\ IF - AS.\ SG}{\beta\varepsilon}$$

$$+\frac{AI.\ IF - AS.\ SG - \gamma.\ AP}{\gamma\zeta} + \frac{AL.\ LH - AS.\ SG}{\delta\zeta}\Big)$$

Ex. Es sei AP = 2, PM = 3, PN = 8, AI = 7, IF = 9, AS = 10, SG = 10, AL = 9, LH = 1; so ist

$$AP - AI = -5$$
$$SG - IF = 1$$
$$AI - AS = -3$$
$$PN - IF = -1$$

also $\alpha = -5.\ \frac{1}{-3} - 1 = \frac{5-3}{3} = \frac{2}{3}$

Ebenso $\beta = -3.\ \left(\frac{1}{-3} - \frac{1}{-5}\right) = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5}$

Ferner

$$IF - SG = -1$$
$$LH - SG = -9$$
$$AS - AL = 1$$

folglich $\gamma = -3.\ \frac{-9}{1} - 1 = 26,$

und $\delta = 1.\ \frac{-1}{-3} - 9 = \frac{1-27}{3} = \frac{-26}{3};$

Ferner

$$AI^2 - AP^2 = 49 - 4 = 45$$
$$AI^2 - AS^2 = 49 - 100 = -51$$

also

also $\frac{AI^2 - AP^2}{\alpha} = \frac{45}{\frac{2}{3}} = \frac{135}{2}$,

und $\frac{AI^2 - AS^2}{\beta} = \frac{-51}{\frac{2}{5}} = \frac{-255}{2}$, folglich

$$\varepsilon = \frac{135 - 255}{2} = -\frac{120}{2} = -60;$$

Weiter

$AS^2 - AI^2 = 51$. $AS^2 - AL^2 = 19$, also

$\frac{AS^2 - AI^2}{\gamma} = \frac{51}{26}$ und

$\frac{AS^2 - AL^2}{\delta} = \frac{19}{-\frac{26}{3}} = -\frac{57}{26}$

mithin $\zeta = \frac{51 - 57}{26} = \frac{-6}{26} = \frac{-3}{13}$;

Dieß giebt nun e =

$$\left(\frac{\frac{22}{3} + 17}{-40} + \frac{19}{24} + \frac{305}{6} - \frac{297}{6}\right) : \left(\frac{48\frac{1}{3}}{-40} + \frac{37}{24} + \frac{89}{6} - \frac{273}{6}\right)$$

$$= \frac{-\left(\frac{22 + 51}{120}\right) + \frac{95}{120} + \frac{6100}{120} - \frac{5940}{120}}{-\left(\frac{144 + 1}{120}\right) + \frac{185}{120} + \frac{1780}{120} - \frac{5460}{120}}$$

$$= \frac{6195 - 6013}{1965 - 5605} = -\frac{182}{3640} = -\frac{1}{20} = -0{,}05$$

Daraus

Daraus giebt sich nun aus einem Werth für c,

$$c = \frac{-55 - 0,05.\ 2.\ 5}{-5} = 11,1$$

und aus dem ersten Werth für d erhält man

$$\frac{PM^2 - PN^2 + e.\ AP.\ (PN - PM)}{PM - PN} = 11,1;$$

$$\frac{e.\ AP.\ PN + IF^2 - PN^2 - e.\ AI.\ IF}{\alpha} = 29,025$$

$$\frac{IF^2 - e.\ AI.\ IF - SG^2 + e.\ AS.\ SG}{\beta} = -52,125$$

dieses zusammenaddirt, giebt $11,1 + 29,025 - 52,125 = -12$, und

$$\frac{AI^2 - AP^2}{\alpha} + \frac{AI^2 - AS^2}{\beta} = -60$$

folglich $\quad d = \frac{-12}{-60} = 0,2;$

Und aus einem der Werthe für b, giebt sich

$$b = -0,15$$

und nun aus einem Werth für a,

$$a = -24,4$$

Einigermaßen zu prüfen, ob die bisherige Rechnung ihre Richtigkeit habe, kann man z. B. die beiden ersten Gleichungen dieses Satzes, die für PM^2 und PN^2 mit einander vergleichen; aus diesen müßte nämlich folgen Q.)

$$PM^2 - c.\ PM - e.\ AP.\ PM = PN^2 - c.\ BN - e.\ AP.\ PN$$

Nun

Nun ist aber

$$PM^2 - c.PM - e.AP.PM = 9 - 11,1.3 + 0,05.2.3$$
$$= 9 - 33,3 + 0,3$$
$$= 9,3 - 33,3$$
$$= -24;$$

Eben so

$$PN^2 - c.PN - e.AP.PN = 64 - 11,1.8 + 0,05.2.8$$
$$= 64 - 88,8 + 0,8$$
$$= -24;$$

wie die Gleichung Q erfodert.

Man hat demnach $\frac{\alpha}{\zeta} = 24,4$; $\frac{\beta}{\zeta} = 0,15$; $\frac{\gamma}{\zeta} = -11,1$; $\frac{\delta}{\zeta} = -0,2$; $\frac{\varepsilon}{\zeta} = 0,05$; und es wird aus (419.) allgemein R.)

$$y^2 = -24,4 - 0,15.x + 11,1.y + 0,2.x^2 - 0,05.xy;$$

wo sich zu jeder Abscisse die zugehörige Ordinate finden läßt, und daher von der Linie, von welcher fünf Punkte gegeben sind, sich noch so viele Punkte angeben lassen, als man will. Die Gleichung R sieht nämlich, wie in 78. ausgedrückt, so aus:

$$y^2 = (11,1 - 0,05.x).y + (0,2.x^2 - 0,15.x - 24,4)$$

man setze also in 78.

$$p = 11,1 - 0,05.x$$
$$q = 0,2.x^2 - 0,15.x - 24,4$$
$$z = y$$

so

so ist

$$y = 5,55 - 0,025 . x \pm r(30,8025 - 0,2775 . x + 0,000625 . x^2 + 0,2 . x^2 - 0,15 . x - 24,4)$$

$$= 5,55 - 0,025 . x \pm r(6,4025 - 0,4275 . x + 0,200625 . x^2)$$

welches die zu jeder Abscisse gehörige Ordinate giebt.

Hieraus werden Anfänger übersehen, wie sich dergleichen allgemeine Gleichungen wie die 419, die ihnen sonst ganz unnütz scheinen möchten, in der Ausübung wirklich berechnen lassen, und zugleich eine Gelegenheit finden, sich in dergleichen Rechnungen zu üben.

§. 431.

Man setze in 78.

$$p = -\frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta};$$

$$q = -\frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta};$$

so wird daselbst

$$y = -\frac{\varepsilon x + \gamma}{2\zeta} \pm r\left(\left(\frac{\varepsilon x + \gamma}{2\zeta}\right)^2 - \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta}\right)$$

also

$$1.)\ y = -\frac{\varepsilon x + \gamma}{2\zeta} - r\left(\left(\frac{\varepsilon x + \gamma}{2\zeta}\right)^2 - \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta}\right)$$

$$2.)\ y = -\frac{\varepsilon x + \gamma}{2\zeta} + r\left(\left(\frac{\varepsilon x + \gamma}{2\zeta}\right)^2 - \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta}\right)$$

und die Summe dieser beiden Werthe ist = $-\frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta}$; nun sind aber hier die beiden Werthe vo y, PM und PN, folglich

$$PM + PN = -\frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta}$$

Die Gleichung selbst

$$y^2 + \frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta} y + \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0;$$

folgt aus der 419. wenn man nur daselbst überall mit ζ dividirt. Um nun aus dieser Gleichung das zweite Glied wegzuschaffen, muß man eine Gleichung aus ihr, in der das zweite Glied fehlt, nach 282. machen. Zu dem Ende setze man $y = \nu - e$, wo man den Werth von e noch nicht weiß, so erhält man aus der vorigen Gleichung diese:

$$\nu^2 - 2e\nu + e^2 + \left(\frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta}\right).(\nu - e) + \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta}$$

$$= \nu^2 - 2e.\nu + e^2 - \left(\frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta}\right).e + \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0;$$

$$+ \frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta}$$

In dieser Gleichung soll nun das zweite Glied fehlen, also $\left(\frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta} - 2e\right)\nu = 0$ sein; aber für $\left(\frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta} - 2e\right)\nu = 0$ ist auch $\frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta} - 2e = 0$

oder

oder $2\left(\frac{\varepsilon x+\gamma}{2\zeta}-e\right)=0$

Demnach auch

$$\frac{\varepsilon x+\gamma}{2\zeta}-e=0$$

und daher $e=\frac{\varepsilon x+\gamma}{2\zeta}$;

Um also in obiger Gleichung das zweite Glied wegzuschaffen, darf man nur $y=\nu-e=\nu-\frac{\varepsilon x+\gamma}{2\zeta}$ setzen. Solchergestalt erhält man folgende Gleichung

$$\nu^2-2\nu.\left(\frac{\varepsilon x+\gamma}{2\zeta}\right)+\left(\frac{\varepsilon x+\gamma}{2\zeta}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon x+\gamma}{\zeta}\right).$$

$$\left(\nu-\frac{\varepsilon x+\gamma}{2\zeta}\right)+\frac{\delta x^2+\beta x+\alpha}{\zeta}=\nu^2+\frac{(\varepsilon x+\gamma)^2}{4\zeta^2}$$

$$-\frac{\nu.(\varepsilon x+\gamma)}{\zeta}+\nu.\left(\frac{\varepsilon x+\gamma}{\zeta}\right)-\left(\frac{\varepsilon x+\gamma}{2\zeta}\right).\left(\frac{\varepsilon x+\gamma}{\zeta}\right)$$

$$+\frac{\delta x^2+\beta x+\alpha}{\zeta}=\nu^2+\frac{(\varepsilon x+\gamma)^2}{4\zeta^2}-\frac{2(\varepsilon x+\gamma)^2}{4\zeta^2}$$

$$+\frac{\delta x^2+\beta x+\alpha}{\zeta}=\nu^2-\frac{(\varepsilon x+\gamma)^2}{4\zeta^2}+\frac{\delta x^2+\beta x+\alpha}{\zeta}$$

$=0$; wo ν. zween entgegengesetzte Werthe hat.

§. 432.

Für x = AO ist y = o, folglich $-\frac{\varepsilon x+\gamma}{\zeta}=$ PM + PN = o, also auch $-(\varepsilon x+\gamma)$ oder auch $\varepsilon x+\gamma=o$, mithin $\varepsilon x=-\gamma$ und $x=-\frac{\gamma}{\varepsilon}$ = AO; weil nun AO = AP + PO, folglich AO − AP = PO, so ist, wenn man in 431. x = AP setzt, $-\frac{\gamma}{\varepsilon}-x=-\left(\frac{\gamma+\varepsilon x}{\varepsilon}\right)$ = PO; nun sei mit PO zwischen den Schenkeln IO und KO ein Kreis beschreiben, so wird PO der Sinus totus und PL die Tangente dieses Bogens sein; setzt man also den Halbmesser = 1, so ist

$$\text{tang } O : 1 = PL : PO$$

folglich

$$\text{tang } O . PO = PL$$

und

$$\text{tang } O = \frac{PL}{PO}$$

$$= \frac{-(\varepsilon x+\gamma) : 2\zeta}{-(\varepsilon x+\gamma) : \varepsilon}$$

$$= \frac{(\varepsilon x+\gamma) . \varepsilon}{(\varepsilon x+\gamma) . 2\zeta}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2\zeta}$$

Es

Es läßt sich also allemal der zu einer Reihe von Ordinaten gehörige Durchmesser ziehen, sobald man den Quotienten $\frac{\varepsilon}{2\zeta}$ weis. Nun ist aber (427.) $\frac{\varepsilon}{\zeta} = - e$, also $\frac{\varepsilon}{2\zeta} = - \frac{1}{2} e =$

$$\left(\frac{-(PM + PN).\,\alpha - IF^2 + PN^2}{\alpha\varphi} + \frac{SG^2 - IF^2}{\beta\varphi} + \frac{SG^2 - IF^2 + (PM + PN).\,\lambda}{\lambda\mu} + \frac{SG^2 - LH^2}{\delta\mu}\right) : 2.$$

$$\left(\frac{AI.\,IF - AP.\,PN + \alpha.\,AP}{\alpha\varphi} + \frac{AI.\,IF - AS.\,SG}{\beta\varphi} + \frac{AI.\,IF - AS.\,SG - \lambda.\,AP}{\lambda\mu} + \frac{AL.\,LH - AS.\,SG}{\delta\mu}\right)$$

wenn man in 427. Zweideutigkeit zu vermeiden φ, λ, μ statt $\varepsilon, \gamma, \zeta$ setzt; also $\frac{\varepsilon}{2\zeta}$ und tang O gefunden. Wollte man sich dieser Art bedienen, der Linie HNMFG (fig. 16.) den Durchmesser zu ziehen, der der Reihe von Sehnen MN, FL ꝛc. zugehörte, so berechne man zuerst $-\frac{1}{2} e$; es sei nämlich AP = 2, PM = 3, PN = 8, AI = 7, IF = 9, AS = 10, SG = 10, AL = 9, LH = 1, so wird aus 427. $- e = 0{,}05$, also $- \frac{1}{2} e = \frac{\varepsilon}{2\zeta} =$ tang O = 0,025; nun suche man in den

Tafeln unter den Tangenten diejenige auf, die der gefundenen 0,025 am nächsten kommt, dieß wird die Tangente $1^\circ 26'$ sein; der zu dieser Tangente gehörige Winkel also $1^\circ 26'$ ist (fig. 17.) O oder überhaupt der Winkel, den der gesuchte Durchmesser mit der Abscissenaxe AS. (fig. 16.) macht. Der Ordinaten Winkel NPS, der gegeben ist, sei $= 60^\circ$. Nun sind der vorige Winkel $1^\circ 26'$, dieser 60° und der ω, welchen der gesuchte Durchmesser mit MN auf der Seite nach der Abscissenaxe AS zu macht, die drei Winkel eines Dreiecks, folglich ist

$$\omega = 180^\circ - (60 + 1^\circ 26') = 118^\circ 34'$$

Da nun der Durchmesser mitten durch MN gehen muß, so theile man MN in zwei gleiche Theile, und ziehe durch den Theilungspunkt eine grade Linie so, daß der Winkel, den sie mit MN auf der Seite macht, auf welcher die Abscissenaxe AC liegt, $= 118^\circ 34'$ wird; diese grade Linie ist der gesuchte Durchmesser. Diese Art, den Durchmesser zu ziehen, ist aber bey wirklicher Anwendung ziemlich weitläuftig, und man kann sich daher in der Ausübung eines weit bequemern Verfahrens bedienen. Man darf nämlich nur, um den einer gegebenen Reihe von Sehnen zugehörigen Durchmesser zu erhalten, zwo solcher Sehnen in zwei gleiche Theile theilen; die grade Linie, welche sodann durch diese beide Theilungspunkte gezogen

zogen wird, ist der verlangte Durchmesser. Indessen ist auch die Absicht des Ausdrucks

$$\tang O = \frac{\varepsilon}{2\zeta}$$

eigentlich nicht, zu zeigen, wie man den Durchmesser ziehen solle, sondern nur seine Lage gegen die Abscissenlinie durch einen allgemeinen Ausdruck zu bestimmen, damit man sich desselben in andern Rechnungen bedienen kann.

§. 434.

Man setze in der Gleichung ⊙ (431.) statt des zweiten Glieds blos Ay, statt des dritten B, so erhält man

$$y^2 + Ay + B = 0;$$

also
$$1.)\ y = -\tfrac{1}{2} A - \sqrt{(\tfrac{1}{4} A^2 - B)}$$
$$2.)\ y = -\tfrac{1}{2} A + \sqrt{(\tfrac{1}{4} A^2 - B)}$$

und das Produkt aus diesen beiden Werthen $= \tfrac{1}{4} A^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{4} A^2 - B)}.\ \tfrac{1}{2} A - \sqrt{(\tfrac{1}{4} A^2 - B)}.$

$$\tfrac{1}{2} A - \tfrac{1}{4} A^2 + B = B = \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta};$$

Folglich ist in (⊙) $\frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta}$ dem Produkt aus beiden Werthen von y gleich. Diese Werthe sind aber hier entweder beide = IK, oder beide = GH, folglich enthält $\frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta}$ zwei

Werthe, sowohl den für IK^2, als den für GH^2; da nun überdas $-\left(\frac{\varepsilon x + \gamma}{2\zeta}\right)$ ein Ausdruck sowohl für IK als für GH ist (431.), so ist auch $\left(\frac{\varepsilon x + \gamma}{2\zeta}\right)^2$ ein Ausdruck, der zwei Werthe sowohl den für IK^2, als den für GH^2 enthält; und man hat daher

$$\frac{\varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon x\gamma + \gamma^2}{4\zeta^2} = \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta}$$

mithin

$$\varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon x\gamma + \gamma^2 = (\delta x^2 + \beta x + \alpha).\,4\zeta$$

und

$$\varepsilon^2 x^2 = (\delta x^2 + \beta x + \alpha).\,4\zeta - 2\varepsilon x\gamma - \gamma^2;$$
$$= 4\delta\zeta x^2 + 4\beta\zeta x + 4\alpha\zeta - 2\varepsilon x\gamma - \gamma^2;$$

folglich

$$(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta)\,x^2 = (4\beta\zeta - 2\varepsilon\gamma).\ x + 4\alpha\zeta - \gamma^2;$$

Dieß giebt in 184. $a = \varepsilon^2 - 4\delta\zeta$, $2\varepsilon\gamma - 4\beta\zeta = b$, und $\gamma^2 - 4\alpha\zeta = c$ gesetzt

$$x = [4\beta\zeta - 2\varepsilon\gamma \pm \surd((4\beta\zeta - 2\varepsilon\gamma)^2 + 4.\,(4\alpha\zeta - \gamma^2).\,(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta))] : 2(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta)$$

$$= \frac{2\beta\zeta - \varepsilon\gamma \pm \surd((2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 + (4\alpha\zeta - \gamma^2).(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta))}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta}$$

Also

$$1.)\ x = \frac{2\beta\zeta - \varepsilon\gamma + \surd((2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 + (4\alpha\zeta - \gamma^2).(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta))}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta}$$

$$2.)\ x = \frac{2\beta\zeta - \varepsilon\gamma - \surd((2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 + (4\alpha\zeta - \gamma^2).(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta))}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta}$$

Der

Der erste von diesen beiden Werthen ist die zu derjenigen Ordinate, deren beide Werthe GH sind; und der letzte die zu derjenigen Ordinate, deren beide Werthe IK sind, gehörige Abscisse. Nun ist aber KH = AH − AK, also KH = $[2\beta\zeta - \varepsilon\gamma + \sqrt{}((2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 + (4\alpha\zeta - \gamma^2).(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta)) - (2\beta\zeta - \varepsilon\gamma - \sqrt{}((2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 + (4\alpha\zeta - \gamma^2).(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta)))] : (\varepsilon^2 - 4\delta\zeta) =$

$$\frac{2\sqrt{}((2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 + (4\alpha\zeta - \gamma^2).(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta))}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta}$$

Zieht man nun aus G mit KH eine Parallellinie durch IK, so wird IK in zwei Theile getheilt, wovon der untere = GH, der obere = IK − GH ist. Weil nun die aus G bis an IK gezogene grade Linie = KH ist, so hat man ein rechtwinklichtes Dreieck, davon der eine Cathet = IK − GH, der andere = KH ist, und es ist $IG^2 = KH^2 + (IK - GH)^2$; aber vermöge 431. ist IK = $(\varepsilon.AK + \gamma) : 2\zeta$ und $GH = -\frac{(\varepsilon.AH + \gamma)}{2\zeta}$

Demnach $IK - GH = \frac{\varepsilon.AH + \gamma}{2\zeta} - \left(\frac{\varepsilon.AK + \gamma}{2\zeta}\right)$ $= \frac{\varepsilon.(AH - AK)}{2\zeta} = \frac{\varepsilon.KH}{2\zeta}$, und $IG^2 = KH^2 + (IK - GH)^2 = KH^2 + \frac{\varepsilon^2.KH^2}{4\zeta^2} = \frac{\varepsilon^2 + 4\zeta^2}{4\zeta^2}$. KH^2, folglich hat man für die Länge des Durch-

messers $IG = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon^2 + 4\zeta^2}{4\zeta^2} . KH^2\right)} = KH . \frac{\sqrt{(\varepsilon^2 - 4\zeta^2)}}{2\zeta}$

$$= \frac{2\sqrt{((2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 - (\varepsilon^2 - 4\delta\zeta) . (\gamma^2 - 4\alpha\zeta))}}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta} .$$

$\frac{\sqrt{(\varepsilon^2 + 4\zeta^2)}}{2\zeta}$. Ist also $(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta) . (\gamma^2 - 4\alpha\zeta) > (2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2$, so ist die Größe unter dem Wurzelzeichen des ersten Factors verneint, also die Wurzel daraus und daher KH unmöglich. Da nun $(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 = 4\beta^2\zeta^2 + \varepsilon^2\gamma^2 - 4\beta\varepsilon\zeta\gamma$, und $(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta) . (\gamma^2 - 4\alpha\zeta) = \varepsilon^2\gamma^2 - 4\delta\zeta\gamma^2 - 4\alpha\varepsilon^2\zeta + 16 . \alpha\delta\zeta^2$, so darf $4\beta^2\zeta^2 - 4\beta\varepsilon\zeta\gamma$ nicht $< 16\alpha\delta\zeta^2 - 4\delta\gamma^2\zeta - 4\alpha\varepsilon^2\zeta$, oder $\beta^2\zeta^2 - \beta\varepsilon\zeta\gamma$ nicht $< 4\alpha\delta\zeta^2 - \delta\gamma^2\zeta - \alpha\varepsilon^2\zeta$ seyn, wenn KH möglich seyn soll. Es ist also KH unmöglich, wenn

$$\beta^2 - \frac{\beta\varepsilon\gamma}{\zeta} < 4\alpha\delta - \left(\frac{\delta\gamma^2 + \alpha\varepsilon^2}{\zeta}\right)$$

aber wenn KH unmöglich ist, so ist es auch IG; d. i. IG giebt in diesem Fall für die Linie der zweiten Ordnung keinen solchen Durchmesser ab, der sie irgendwo schnitte. Es giebt aber auch Fälle, da sie nur in einem Punkt die Linie von der zweiten Ordnung schneidet, und von da zwischen den Schenkeln der krummen Linie unendlich fortgeht, ohne ihr irgendwo zum zweitenmal zu begegnen; dieß ist der Fall, da $\varepsilon^2 = 4\delta\zeta$. Setzt man nämlich $\varepsilon^2 = 4\delta\zeta$, so ist

x =

$$x = \frac{2\beta\zeta - \varepsilon\gamma \pm \surd((2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 + (4\alpha\zeta - \gamma^2).\,o)}{o}$$

$$= \frac{2\beta\zeta - \varepsilon\gamma \pm \surd(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2}{o}, \text{ also}$$

$$1.)\ x = \frac{2\beta\zeta - \varepsilon\gamma + \surd(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2}{o}$$

$$= \frac{2\beta\zeta - \varepsilon\gamma + 2\beta\zeta - \varepsilon\gamma}{o}$$

$$= \frac{2.\,(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)}{o}$$

$$= \infty$$

$$2.)\ x = \frac{2\beta\zeta - \varepsilon\gamma - \surd(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2}{o}$$

$$= \frac{2\beta\zeta - \varepsilon\gamma - 2\beta\zeta + \varepsilon\gamma}{o}$$

$$= \frac{o}{o} = o\ (*)$$

folglich ist für $\varepsilon^2 = 4\delta\zeta$, AH = ∞, und AK = o, mithin KH = AH − AK = ∞, wie auch die

(*) An sich ist $\frac{o}{o}$ ein unbestimmter Ausdruck, er könnte = 1, = 2, = 3 u. s. f. seyn, weil o = o = 2. o = 3. o u. s. f. ist. Hier ist aber offenbar $\frac{o}{o}$ = o; S. hiervon Karstens Beitr. zur Aufnahme der Mathem. p. 35. sqq.

die Gleichung für KH unmittelbar giebt. Aber für KH = ∞ ist auch IG = ∞, daß also der Punkt G unendlich weit von I absteht, und es giebt also hier dem Scheine nach nur einen Durchschnittspunkt I. Der andere ist nämlich nicht unmöglich; er ist nur unendlich weit entfernt. Wendet man nun diese Betrachtuug nach 421. auf die verschiedenen Arten der Kegelschnitte an, so ergiebt sich folgendes.

Für die Parabel ist $\alpha = \gamma = \delta = \varepsilon = 0$; $\zeta = 1$, und $\beta = -a$, also $\beta^2 = a^2$, und $4\alpha\delta - \left(\frac{\delta\gamma^2 - \alpha\varepsilon^2}{\zeta}\right) = \frac{4.0 - 0 + 0}{1} = 0$, folglich ist

$$\beta^2 - \frac{\varepsilon\gamma}{\zeta} \cdot \beta > 4\alpha\delta - \left(\frac{\delta\gamma^2 + \alpha\varepsilon^2}{\zeta}\right)$$

daß also für die Parabel Durchmesser möglich sind, die sie wenigstens in einem Punkt durchschneiden. Es ist aber ferner bei ihr $\varepsilon^2 = 4\delta\zeta$, oder $\varepsilon^2 - 4\delta\zeta = 0$, weil $1 = 0$, $\delta = 0$, und $\zeta = 1$, folglich ist die Axe der Parabel unendlich groß, und die Parabel wird nur einmal von ihr geschnitten. In der Hyperbel ist $\alpha = \gamma = \varepsilon = 0$, $\zeta = 1$, $\beta = b$, $\delta = \frac{b}{a}$, folglich

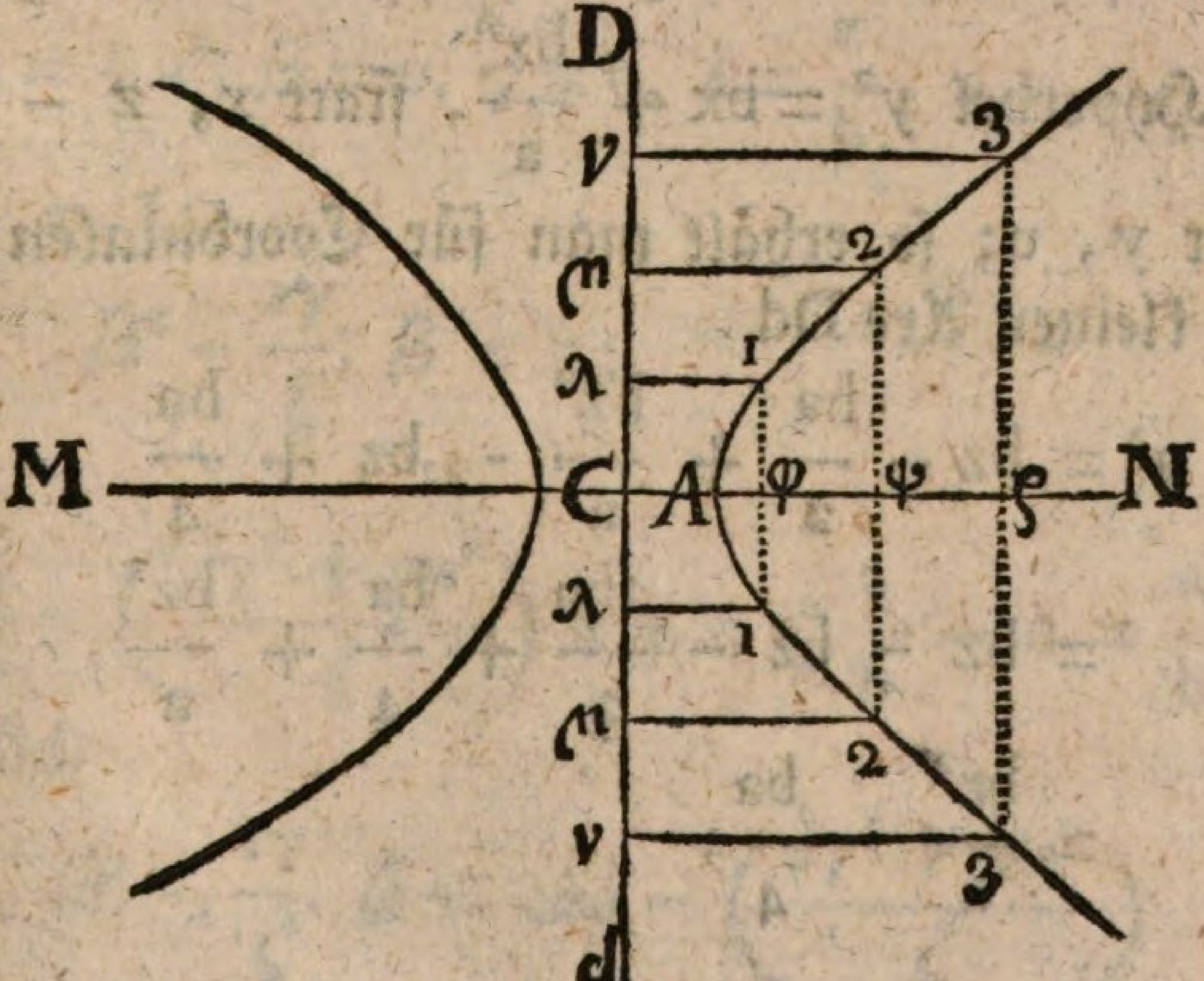
$$4\alpha\delta - \left(\frac{\delta\gamma^2 + \alpha\varepsilon^2}{\zeta}\right) = 4 \cdot 0 \cdot \frac{b}{a} - \frac{\left(\frac{b}{a} \cdot 0 + 0\right)}{1} = 0;$$

Demnach

Demnach $\beta^2 - \frac{\varepsilon\gamma}{\zeta}\beta > 4\alpha\delta - \left(\frac{\delta\gamma^2 + \alpha\varepsilon^2}{\zeta}\right)$
also ist es nicht unmöglich, der Hyperbel einen Durchmesser zu ziehen, der sie wenigstens in einem Punkt schneidet. Daß sie aber in zween Punkten von ihm in der That geschnitten wird, folgt daraus, weil ε^2 nicht $= 4\delta\zeta$ seyn kann, denn es ist ε^2 $= 0$, und $4\ \delta\zeta = 4\frac{b}{a}$, also $4\delta\zeta > \varepsilon^2$, wie auch die Figur der Hyperbel ausweist.

Den Fall noch zu erläutern, da der Durchmesser einer Linie der zwoten Ordnung in gar keinem Punkt begegnet, will ich noch folgende Aufgabe vorausschicken.

Eine Gleichung für die Hyperbel zwischen Coordinaten auf der kleinen Axe Dd zu finden.



Aufl.

Aufl. $A\varphi$, $\varphi 1$; $A\psi$, $\psi 2$; $A\varrho$, $\varrho 3$ u. s. w. seien Coordinaten auf dem Durchmesser MN; ferner sei $C\lambda = \varphi 1$, $C\mu = \psi 2$, $C\nu = \varrho 3$ u. s. f. und daher $C\varphi = \lambda 1$, $C\psi = \mu 2$, $C\varrho = \nu 3$ u. s. f. so ist, wenn die Coordinaten auf MN wie gewöhnlich x, y, heißen,

$$C\lambda = \varphi 1 = y;$$
$$C\mu = \psi 2 = y; \text{ u. s. f.}$$

oder, wenn die Abscissen auf Dd von C ausgenommen, u heißen, so ist allgemein

$$u = y;$$

eben so $\lambda 1 = C\varphi;$

$$\mu 2 = C\psi; \text{ u. s. f.}$$

also, wenn die Ordinaten, welche zu Abscissen auf Dd gehören, z heißen, so ist überhaupt

$$z = CA + x = \tfrac{1}{2} a + x$$

Man setze also in die gewöhnliche Gleichung für die Hyperbel $y^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$, statt x, $z - \frac{1}{2}a$; statt y, u; so erhält man für Coordinaten auf der kleinen Axe Dd

$$u^2 = bz - \frac{ba}{2} + \frac{bz^2}{a} - bz + \frac{ba}{4}$$

$$= bz - bz - \frac{2ba}{4} + \frac{ba}{4} + \frac{bz^2}{a}$$

$$= \frac{bz^2}{a} - \frac{ba}{4};$$

also

also $$z^2 = \left(\frac{u^2 + \frac{ba}{4}}{b}\right). a$$

$$= \frac{a}{b} u^2 + \frac{1}{4} a^2$$

Will man demnach auch auf der kleinen Axe Abscissen und Ordinaten mit x, y, bezeichnen, weil man überhaupt Coordinaten so zu benennen gewohnt ist, so ist die gesuchte Gleichung

$$y^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{ax^2}{b} \quad Q.)$$

und $$\frac{1}{4} a^2 * * + \frac{a}{b} x^2 * - y^2 = 0;$$

Diese Gleichung nun, worin ich die nach (419.) fehlende Glieder der Bequemlichkeit wegen mit (*) bemerkt habe, giebt, mit 419. verglichen,

$$\alpha = \frac{1}{4} a^2, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = \frac{a}{b}, \varepsilon = 0, \text{ und}$$
$$\zeta = -1;$$

also $$\beta^2 - \frac{\varepsilon\gamma}{\zeta}. \beta = 0;$$

und

$$4\alpha\delta - \left(\frac{\delta\gamma^2 + \alpha\varepsilon^2}{\zeta}\right) = 4. \frac{1}{4} a^2. \frac{a}{b} - 0 = \frac{a^3}{b};$$

folglich

$$\beta^2 - \frac{\varepsilon\gamma}{\zeta}. \beta < 4\alpha\delta - \left(\frac{\delta\gamma^2 + \alpha\varepsilon^2}{\zeta}\right)$$

mithin

mithin ist Q eine Gleichung für die Hyperbel zwischen Coordinaten auf einem solchen Durchmesser, der die krumme Linie nirgends trift; und daß sich dieses mit der kleinen Axe so verhalte, daß sie nämlich, so weit sie auch verlängert wird, den Schenkeln der Hyperbel doch nirgends begegnet, ist auch schon aus andern Gründen bekannt. (394; 398.) In der Ellipse ist alles, wie in der Hyperbel, nur + a und − a mit einander verwechselt.

§. 437.

Die Gleichung 436. giebt

$$u + \frac{(\mu\varepsilon + 2\nu\delta)\, t\, \mu\gamma + \nu\beta}{2(\mu^2\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu^2\delta)} \pm \sqrt{\left[((\mu\varepsilon + 2\nu\delta).\, t + \mu\gamma + \nu\beta)^2 : 4.\, (\mu^2\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu^2\delta)^2 - \left(\frac{\delta t^2 + \beta t + \alpha}{\mu^2\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu^2\delta}\right)\right]}$$

wo also zu eben der Abscisse t zweene Werthe von u oder zwo Ordinaten gehören, nämlich die pM für $-\surd$ und pn für $+\surd$; da nun des zweiten Glieds Coefficient der Summe der Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen gleich ist, so hat man

$$pn + pM = 2pl = -\frac{(\mu\varepsilon + 2\nu\delta).\, t + \mu\gamma + \nu\beta}{\mu^2\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu^2\delta}$$

folglich

$$pl = -\left(\frac{(\mu\varepsilon + 2\nu\delta).\, t + \mu\gamma + \nu\beta}{2(\mu^2\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu^2\delta)}\right) = \omega \; (Q.)$$

Es

Es ist ferner $\omega : q = 1 : \mu$, folglich $\omega = \frac{q}{\mu}$; eben so ist $pq : \omega = \nu : 1$, folglich $pq = \nu\omega$; da nun $t = Ap = Aq - pq = p - \nu\omega$, und $\omega = \frac{q}{\mu}$, so ergiebt sich $t = p - \nu . \frac{q}{\mu}$; diese Werthe in Q gesetzt, giebt $o =$

$$(2\mu^2\zeta + 2\mu\nu\varepsilon + 2\nu^2\delta)\,\omega + (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)\,t + \mu\gamma + \nu\beta = 2\mu^2\zeta\frac{q}{\mu} + \mu\nu\varepsilon\frac{q}{\mu} + \mu\nu\varepsilon\frac{q}{\mu} + 2\nu^2\delta\frac{q}{\mu} + \mu\varepsilon.\left(p - \nu.\frac{q}{\mu}\right) + 2\nu\delta.\left(p - \nu.\frac{q}{\mu}\right) + \mu\gamma + \nu\beta = (2\mu\zeta + \nu\varepsilon)\,q + \mu\nu\varepsilon\frac{q}{\mu} + 2\nu^2\delta\frac{q}{\mu} + \mu\varepsilon p - \mu\nu\varepsilon.\frac{q}{\mu} + 2\nu\delta p - 2\nu^2\delta\frac{q}{\mu} + \mu\gamma + \nu\beta = (2\mu\zeta + \nu\varepsilon)\,q + 2\nu\delta p + \mu\gamma + \nu\beta + \mu\varepsilon p;$$

oder

$$(2\mu\zeta + \nu\varepsilon)\,q + (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)\,p + \mu\gamma + \nu\beta = o; \quad R.)$$

oder $$q = -\left(\frac{\mu\varepsilon + 2\nu\delta}{2\mu\zeta + \nu\varepsilon}\right)p - \left(\frac{\mu\gamma + \nu\beta}{2\mu\zeta + \nu\varepsilon}\right)$$

Nun ist die Linie, die dieser Gleichung zugehört, die grade (340.), folglich liegen alle Punkte l in einer graden Linie, oder die Linie, welche alle Sehnen nach der Lage Mn halbirt, ist die grade,

daß es also hier wieder einen Durchmesser giebt, der die Abscissenlinie AH irgendwo, hier in o, schneidet. Rückt lq nach o zu fort, so verschwindet es endlich, indem es in o fällt; aber Aq wird alsdann = Ao, man darf also nur in der Gleichung zwischen p und q die q = o setzen, um den Werth für p = Ao zu erhalten. Man bekommt solchergestalt aus R. folgende Gleichung

$$(\mu\varepsilon + 2\nu\delta)\, p + \mu\gamma + \nu\beta = 0;$$

folglich

$$p = Ao = -\frac{\mu\gamma + \nu\beta}{\mu\varepsilon + 2\nu\delta}$$

Nun giebt die Gleichung R.

$$(2\mu\zeta + \nu\varepsilon)\, q = -(\mu\varepsilon + 2\nu\delta)\, p - \gamma\mu - \nu\beta$$
$$= -(\mu\varepsilon + 2\nu\delta) . (Ao - qo) - \gamma\mu - \nu\beta$$

folglich, wenn man den Werth von Ao hier substituirt

$$(2\mu\zeta + \nu\varepsilon)\, q = -(\mu\varepsilon + 2\nu\delta) . -\left(\frac{\gamma\mu + \nu\beta}{\mu\varepsilon + 2\nu\delta} + qo\right)$$
$$- \gamma\mu - \nu\beta = (\mu\varepsilon + 2\nu\delta) . \left(\frac{\gamma\mu + \nu\beta}{\mu\varepsilon + 2\nu\delta}\right) +$$
$$(\mu\varepsilon + 2\nu\delta)\, qo - \gamma\mu - \nu\beta = \gamma\mu + \nu\beta - \gamma\mu -$$
$$\nu\beta + (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)\, qo$$

oder $(2\mu\zeta + \nu\varepsilon)\, q = (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)\, qo$

also $\frac{q}{qo} = \frac{\mu\varepsilon + 2\nu\delta}{2\mu\zeta + \nu\varepsilon}$

Da

Da nun $\frac{q}{qo}$ = tang Aol, so hat man

$$\text{tang Aol} = \frac{\mu\varepsilon + 2\nu\delta}{2\mu\zeta + \nu\varepsilon}$$

$$= \frac{\frac{\mu\varepsilon}{\nu} + 2\delta}{2\frac{\mu\zeta}{\nu} + \varepsilon}$$

$$= \frac{\pi\varepsilon + 2\delta}{2\pi\zeta + \varepsilon} \text{ für tang MpH} = \pi,$$

weil $$\frac{\mu}{\nu} = \frac{\text{sin MpH}}{\text{Cos MpH}} = \text{tang MpH};$$

§. 438.

Es ist oCO = Aol – AOL, also aus der Trigon.

$$\text{tang oCO} = \frac{\text{tang Aol} - \text{tang AOL}}{1 + \text{tang Aol. tang AOL}}$$

$$= \frac{(\pi\varepsilon + 2\delta) : (2\pi\zeta + \varepsilon) - \varepsilon : 2\zeta}{1 + (\pi\varepsilon + 2\delta) : (2\pi\zeta + \varepsilon).\ \varepsilon : 2\zeta}$$

$$= \left(\frac{\pi\varepsilon + 2\delta}{2\pi\zeta + \varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2\zeta}\right) : \left(1 + \left(\frac{\pi\varepsilon^2 + 2\delta\varepsilon}{2\zeta}\right) : (2\pi\zeta + \varepsilon)\right)$$

 =

$$= \left(\frac{\pi\varepsilon + 2\delta - \left(\frac{2\pi\varepsilon\zeta + \varepsilon^2}{2\zeta} \right)}{2\pi\zeta + e} \right) : \left(1 + \frac{\pi\varepsilon^2 + 2\delta\varepsilon}{4\pi\zeta^2 + 2\varepsilon\zeta} \right)$$

$$= \left(\frac{\pi\varepsilon + 2\delta - \left(\frac{2\pi\varepsilon\zeta + \varepsilon^2}{2\zeta} \right)}{2\pi\zeta + \varepsilon} \right) :$$

$$\left(\frac{4\pi\zeta^2 + 2\varepsilon\zeta + \pi\varepsilon^2 + 2\delta\varepsilon}{4\pi\zeta^2 + 2\varepsilon\zeta} \right)$$

$$= \left(\frac{2\pi\varepsilon\zeta + 4\delta\zeta - (2\pi\varepsilon\zeta + \varepsilon^2)}{4\pi\zeta^2 + 2\varepsilon\zeta} \right) .$$

$$\left(\frac{4\pi\zeta^2 + 2\varepsilon\zeta}{4\pi\zeta^2 + 2\varepsilon\zeta + \pi\varepsilon^2 + 2\delta\varepsilon} \right)$$

$$= \frac{(4\delta\zeta - \varepsilon^2) \,.\, (4\pi\zeta^2 + 2\varepsilon\zeta)}{(4\pi\zeta^2 + 2\varepsilon\zeta) \,.\, (4\pi\zeta^2 + 2\varepsilon\zeta + \pi\varepsilon^2 + 2\delta\varepsilon)}$$

$= \dfrac{4\delta\zeta - \varepsilon^2}{4\pi\zeta^2 + 2\varepsilon\zeta + \pi\varepsilon^2 + 2\delta\varepsilon}$, also statt π, $\dfrac{\mu}{\nu}$ gesetzt

$$= \frac{4\delta\zeta - \varepsilon^2}{4\,\frac{\mu}{\nu}.\,\zeta^2 + 2\varepsilon\zeta + \frac{\mu}{\nu}\,\varepsilon^2 + 2\delta\varepsilon}$$

$$= \frac{4\nu\delta\zeta - \nu\varepsilon^2}{4\mu\zeta^2 + 2\nu\varepsilon\zeta + \mu\varepsilon^2 + 2\nu\delta\varepsilon};$$

§. 439.

Aus der Trigon. a. a. O. hat man $-\text{tang}\ Mlo = \text{tang}\ (Mpo + Aol) = (\text{tg.}\ Mpo + \text{tg.}\ Aol) : 1 - \text{tg.}\ Mpo.\ \text{tg.}\ Aol$; aber $\text{tg.}\ Mpo = \mu : \nu$, und $\text{tg.}\ Aol = \dfrac{\mu\varepsilon + 2\nu\delta}{2\mu\zeta + \nu\varepsilon}$ (437.)

also

$$-\ \text{tg}\ Mlo = \frac{\mu : \nu + (\mu\varepsilon + 2\nu\delta) : (2\mu\zeta + \nu\varepsilon)}{1 - (\mu : \nu) . (\mu\varepsilon + 2\nu\delta) : (2\mu\zeta + \nu\varepsilon)}$$

$$= \frac{\mu : \nu + (\mu\varepsilon + 2\nu\delta) : (2\mu\zeta + \nu\varepsilon)}{1 - (\mu^2\varepsilon + 2\mu\nu\delta) : (2\mu\nu\zeta + \nu^2\varepsilon)}$$

und hier Zähler und Nenner mit $2\mu\nu\zeta + \nu^2\varepsilon$ multiplicirt, giebt weiter

$$-\ \text{tg}\ Mlo = \frac{2\mu^2\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu.\ (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)}{2\mu\nu\zeta + \nu^2\varepsilon - \mu^2\varepsilon - 2\mu\nu\delta,}$$

also $$\text{tg}\ Mlo = \frac{2\mu^2\zeta + 2\mu\nu\varepsilon + 2\nu^2\delta}{\mu^2\varepsilon + 2\mu\nu\delta - 2\mu\nu\zeta - \nu^2\varepsilon}$$

oder Zähler und Nenner mit ν^2 dividirt

$$= \frac{\frac{2\mu^2}{\nu^2}\zeta + \frac{2\mu}{\nu}\varepsilon + 2\delta}{\frac{\mu^2\varepsilon}{\nu^2} + \frac{2\mu}{\nu}\delta - \frac{2\mu}{\nu}\zeta - \varepsilon}$$

folglich, da $\dfrac{\mu}{\nu} = \pi$,

$$\text{tg}\ Mlo = \frac{2\pi^2\zeta + 2\pi\varepsilon + 2\delta}{\pi^2\varepsilon + 2\pi\delta - 2\pi\zeta - \varepsilon}$$

§. 440.

In 431. wäre PL = z, und AP = x, ferner $z = -(\varepsilon x + \gamma) : 2\zeta$; in 437. hat man die Gleichung $(2\mu\zeta + \nu\varepsilon)\, q + (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)\, p + \gamma\mu + \nu\beta = 0$; setzt man also statt x und p, g; statt z und q, h; so ist (431.) $h = -(\varepsilon g + \gamma) : 2\zeta$, und $2\zeta h = -\varepsilon g - \gamma$, folglich

$$\text{I.)}\ 2\zeta h + \varepsilon g + \gamma = 0$$

Aus der Gleichung 437. wird

$$\text{II.)}\ (2\mu\zeta + \nu\varepsilon)\, h + (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)\, g + \gamma\mu + \nu\beta = 0;$$

Da nun $\mu . 0 = 0$, so bleibt die Größe $2\zeta h + \varepsilon g + \gamma$ noch $= 0$, wenn man sie mit μ multiplicirt, folglich ist

$$2\mu\zeta h + \mu\varepsilon g + \mu\gamma = 0;$$

und $(2\mu\zeta h + \nu\varepsilon h + \mu\varepsilon g + 2\nu\delta g + \gamma\mu + \nu\beta) - (2\mu\zeta h + \mu\varepsilon g + \mu\gamma) = \nu\varepsilon h + 2\nu\delta g + \nu\beta = 0 - 0 = 0$, folglich bleibt noch $\dfrac{\nu\varepsilon h + 2\nu\delta g + \nu\beta}{\nu} = 0$, oder

$$\text{III.)}\ \varepsilon h + 2\delta g + \beta = 0;$$

Man bekommt solchergestalt für h zweene Werthe, nämlich aus I. ist

$$h = -\frac{\varepsilon g + \gamma}{2\zeta}$$

aus III. ist $h = -\dfrac{2\delta g + \beta}{\varepsilon}$

folglich $-\left(\dfrac{\varepsilon g + \gamma}{2\zeta}\right) = -\left(\dfrac{2\delta g + \beta}{\varepsilon}\right)$

Dieses

Dieses giebt

$$\varepsilon^2 g + \varepsilon\gamma = 4\delta\zeta g + 2\beta\zeta \text{ und}$$
$$(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta)\, g = 2\beta\zeta - \varepsilon\gamma, \text{ folglich}$$
$$g = \frac{2\beta\zeta - \varepsilon\gamma}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta}$$

Eben so erhält man aus III. und I. zweene Werthe für g, woraus sich h bestimmen läßt; aus III. ist nämlich

$$g = -\frac{\beta + \varepsilon h}{2\delta}$$

aus I. ist

$$g = -\frac{\gamma + 2\zeta h}{\varepsilon}$$

Demnach

$$-\frac{\beta + \varepsilon h}{2\delta} = -\frac{\gamma + 2\zeta h}{\varepsilon}$$

also $\beta\varepsilon + \varepsilon^2 h = 2\gamma\delta + 4\delta\zeta h,$
und $(\varepsilon^2 - 4\delta\zeta)\, h = 2\gamma\delta - \beta\varepsilon$
Daraus folgt nun

$$h = \frac{2\gamma\delta - \beta\varepsilon}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta};$$

§. 444.

Es ist

$$\text{tg AVC} = \frac{-\left(\frac{\pi\varepsilon + 2\delta}{2\pi\zeta + \varepsilon}\right) . \varepsilon + 2\delta}{-((2\pi\varepsilon + 4\delta) : (2\pi\zeta + \varepsilon)) . \zeta + \varepsilon} =$$

$$= \frac{-(\pi\varepsilon + 2\delta)\,\varepsilon + 2\delta\,(2\pi\zeta + \varepsilon)}{-(2.\,\pi\varepsilon + 4\delta)\,\zeta + 2\pi\varepsilon\zeta + \varepsilon^2}$$

$$= \frac{4\delta\pi\zeta - \pi\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 4\delta\zeta}$$

$$= -\pi;$$

Nun ist $-\pi = \text{tang ApM}$, also

$$\text{tang AVC} = \text{tang ApM}$$

Aber blos hieraus folgt noch nicht, daß AVC = ApM sein muß, wie aus der Trigonometrie klar ist; denn für AVC = ApM + 180° ist gleichfalls

$$\text{tang AVC} = \text{tang ApM}$$

und doch AVC in = ApM. Diese Zweideutigkeit aber, welche daher rühret, weil eben die Tangente zu zween Winkeln, die kleiner als 360° sind, gehöret, muß wegfallen, so bald man weiß, daß der Winkel, dem die Tangente zugehört, kleiner als 180° sein muß. Und so verhält es sich in gegenwärtigem Fall, wo AVC und ApM beide offenbar kleiner als 180° sind, und daher AVC = ApM sein muß.

§. 453. *

I. Allgemeine Gleichung.

Wenn die Coordinaten einer Linie der zwoten Ordnung auf ihrem Durchmesser genommen werden, wie allemal möglich ist, weil jede Linie der zwoten Ordnung einen Durchmesser hat (431.), so

so giebt sich eine allgemeine Gleichung zwischen diesen Coordinaten auf folgende Art:

1.) Die Gleichung darf nicht über zwo Dimensionen haben, und läßt sich also allgemein so ausdrücken

$$y^2 - \alpha y + \beta = o$$

2.) Da in jeder Gleichung des zweiten Glieds Coefficient der Summe der Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen genommen gleich ist, und in jeder Linie der zwoten Ordnung es allemal zwo gleiche aber entgegengesetzte Ordinaten giebt, so ist

$$\alpha = y - y = o;$$

3.) Folglich verschwindet in der obigen Gleichung das zweite Glied, und die Gleichung verwandelt sich in diese

$$y^2 * + \beta = o;$$

4.) y ist eine Funktion von der Abscisse, folglich ist β ein Ausdruck, der die Abscisse und beständige Größen enthält.

5.) Aber y kann in zween Fällen = o werden, nämlich 1.) wenn x = o, 2.) wenn x der Axe gleich ist; folglich hat x in dieser Gleichung zweene verschiedene Werthe für y = o;

6.) Man setze daher einsweilen

$$y^2 * + \lambda x^2 = o;$$

Aber wenn hier y verschwindet, so verschwindet zugleich x. Es bleiben daher zween Fälle übrig:

1.) Entweder muß man noch eine beständige Größe, die mit keinem x verbunden ist, oder

2.) Eine solche, die zugleich mit x verbunden ist, in die Gleichung setzen.

7.) Fände der erste Fall statt, so erhielte man die Gleichung

$$y^2 * + \lambda x^2 + \gamma = o.$$

Aber hier hätte, für $y = o$, x zweene entgegensetzte aber sonst gleiche Werthe, und da dieses nicht sein darf, so muß

8.) Der letzte Fall hier statt finden, und man hat daher

$$y^2 * + \lambda x^2 + kx = o;$$

II. Die große Axe.

Wenn x der Axe gleich ist, so wird $y = o$, also $\lambda x^2 = - kx$, und $\lambda x = - k$, mithin die Axe $= - \frac{k}{\lambda}$, und diese ist hier entweder endlich oder unendlich, und im ersten Fall entweder bejaht, oder verneint. Ist sie unendlich, so muß $\lambda = o$ sein, im andern Fall aber ist λ bejaht oder verneint, nachdem die Axe verneint oder bejaht ist.

III. Gleichungen für besondere Fälle.

Es sei für rechtwinklichte Coordinaten $k = - p$; $\lambda = - \frac{p}{a}$, so erhält man aus I. 8.

1.) für

1.) für eine unendliche Axe

$$y^2 - px = 0$$

die Gleichung für die Parabel

2.) für eine endliche bejahte Axe aus I. 8. und II.

$$y^2 - px + \frac{px^2}{a} = 0$$

die Gleichung für die Ellipse, die sich in die für den Kreis

$$y^2 - px + x^2 = 0$$

verwandelt, wenn man $p = a$ setzt.

3.) für eine endliche verneinte Axe aus I. 8. und II.

$$y^2 - px - \frac{px^2}{a} = 0,$$

welches die Gleichung für die Hyperbel ist.

IV. Die kleine Axe.

Für die Ordinate aus dem Mittelpunkt ist x der halben großen Axe gleich, oder $= -\frac{k}{2\lambda}$, folglich $y^2 = \frac{k^2\lambda}{4\lambda^2} - \frac{k^2}{2\lambda} = \frac{k^2 - 2k^2}{4\lambda} = -\frac{k^2}{4\lambda}$, und $y = \frac{1}{2}k\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}$, mithin ist die kleine Axe, welche c heißen soll, $= 2y = k\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}$. Dieses auf die besondere Fälle in III. angewandt, giebt

1.) für

1.) für die Parabel

$$c = k.\, \sqrt{-\frac{1}{0}} = k.\, \sqrt{\frac{1}{0}} = \infty$$

also ist hier c eigentlich nicht unmöglich, aber doch eine Größe, die sich nicht angeben läßt, weil sie unendlich groß ist.

2.) für die Ellipse

$$c = k.\, \sqrt{\left(\frac{-1}{-\lambda}\right)} = -p.\, \sqrt{\frac{a}{p}} = \sqrt{\frac{p^2 a}{p}}$$

$= \sqrt{ap}$ also möglich und endlich.

3.) für die Hyperbel

$$c = k.\, \sqrt{\left(\frac{-1}{+\lambda}\right)} = \sqrt{-ap}$$ unmöglich.

V. Der Parameter

1.) für die Parabel. Dieser ihr Parameter läßt sich nicht aus der großen und kleinen Axe bestimmen, weil beide unendlich sind. Aber aus der Gleichung zwischen den Coordinaten $y^2 = -kx$, erhält man den Parameter $-k = y^2 : x$;

2.) für die Ellipse. Für diese wird aus IV. $2\ c^2 = -\frac{k^2}{\lambda} = p^2 : \frac{p}{a}$; also $-k$ oder $p = \frac{c^2}{a}$, und

$$-k : k\sqrt{\left(\frac{-1}{\lambda}\right)} = k\sqrt{\left(\frac{-1}{\lambda}\right)} : -\frac{k}{\lambda};$$ d. i.

$$p : c = c : a;$$

3.) für

3.) für die Hyperbel setze man nur in der vorigen Gleichung $+\lambda$ statt $-\lambda$, oder $-a$ statt $+a$, so giebt sich der Parameter $-k$ oder $p = \frac{c^2}{-a}$, und $p : c = c : -a$;

§. 454.

Einer von den beiden Werthen von ω, die zu $z = o$ gehören, ist ig, dieser giebt sich aus der Gleichung des vorigen §s $z^2 - k\omega = \lambda\omega^2$, wenn man in ihr $z = o$ setzt; dadurch erhält man nämlich $-\frac{k\omega}{\lambda} = \omega^2$ oder $\omega^2 + \frac{k\omega}{\lambda} = o$, da sowohl $\omega = o$, als $\omega = -\frac{k}{\lambda}$ sein kann; und da einer von beiden Werthen von ω die ig sein muß, so ist es offenbar der letzte, also ig $= -\frac{k}{\lambda}$;

§. 459. *

Es sei die Gleichung für den Kegelschnitt zwischen rechtwinklichten Coordinaten

$$y^2 + \left(\frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta}\right) y + \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = o;$$

so wird es in der Axe einen Punkt O geben, wo sie von dem Durchmesser IG geschnitten wird (§. 431. u. f.) und die Länge des Durchmessers IG wird =

$\sqrt{}[(\varepsilon^2$

$$\frac{\surd[(\varepsilon^2+4\zeta^2).4.(2\beta\zeta-\varepsilon\gamma)^2-4.(\varepsilon^2-4\delta\zeta).(\gamma^2-4\alpha\zeta)]}{2\zeta.(\varepsilon^2-4\delta\zeta)}$$

$$=\frac{2\surd[(\varepsilon^2-4\zeta^2)((\beta^2-\alpha\delta)\zeta^2+(\alpha\varepsilon+\delta\gamma^2-\beta\gamma\varepsilon)\zeta)]}{\zeta(\varepsilon^2-4\delta\zeta)}$$

Aus der Gleichung zwischen schiefwinklichten Coordinaten (436.) giebt sich

$$ik=\frac{(\mu\varepsilon+2\nu\delta)\,t+\mu\gamma+\nu\beta}{2(\mu^2\zeta+\mu\nu\varepsilon+\nu^2\delta)}$$

und $ik^2=\frac{\delta t^2+\beta t+\alpha}{\mu^2\zeta+\mu\nu\varepsilon+\nu^2\delta}$,

Daraus folgt

$$\frac{(\mu\varepsilon+2\nu\delta)^2t^2+2(\mu\varepsilon+2\nu\delta)(\mu\gamma+\nu\beta)t+\mu\gamma+\nu\beta)^2}{4(\mu^2\zeta+\mu\nu\varepsilon+\nu^2\delta)^2}$$

$$=\frac{\delta t^2+\beta t+\alpha}{\mu^2\zeta+\mu\nu\varepsilon+\nu^2\delta};\text{ also}$$

$$(\mu\varepsilon+2\nu\delta)^2t^2+2(\mu\varepsilon+2\nu\delta).(\mu\gamma+\nu\beta)t+(\mu\gamma+\beta)^2=4\delta(\mu^2\zeta+\mu\nu\varepsilon+\nu^2\delta)t^2+4\beta(\mu^2\zeta+\mu\nu\varepsilon+\nu^2\delta)t+4\alpha(\mu^2\zeta+\mu\nu\varepsilon+\nu^2\delta);$$

und

$$t^2+\frac{(2(\mu\varepsilon+2\nu\delta)(\mu\gamma+\nu\beta)-4\beta(\mu^2\zeta+\mu\nu\varepsilon+\nu^2\delta)).t}{(\mu\varepsilon+2\nu\delta)^2-4\delta(\mu^2\zeta+\mu\nu\varepsilon+\nu^2\delta)}$$

$$=\frac{4\alpha(\mu^2\zeta+\mu\nu\varepsilon+\nu^2\delta)-(\mu\gamma+\nu\beta)^2}{(\mu\varepsilon+2\nu\delta)^2-4\delta(\mu^2\zeta+\mu\nu\varepsilon+\nu^2\delta)}$$

Der

Der Kürze wegen sey

$$\mu\varepsilon + 2\nu\delta = A;$$
$$\mu\gamma + \nu\beta = C;$$
$$\mu^2\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu^2\delta = D;$$

so erhält man

$$t^2 + \left(\frac{2AC - 4\beta D}{A^2 - 4\delta D}\right) t = \frac{4\alpha D - C^2}{A^2 - 4\delta D};$$

und es wird

$$t = \frac{2\beta D - AC \pm \sqrt{(4D^2(\beta^2 - 4\alpha\delta) + 4CD.(C-A))}}{A^2 - 4\delta D}$$

Da man also einen doppelten Werth für t erhält, so ziehe man aus g die gh der ik gleichlaufend, und nun wird

$$Ak = \frac{2\beta D - AC - \sqrt{(4D^2(\beta^2 - 4\alpha\delta) + 4CD.(C-A))}}{A^2 - 4\delta D}$$

und

$$Ah = \frac{2\beta D - AC + \sqrt{(4D^2(\beta^2 - 4\alpha\delta) + 4CD(C-A))}}{A^2 - 4\delta D}$$

Mithin

$$kh = \frac{4\beta D - 2AC}{A^2 - 4\delta D}$$

Aus i lasse man auf die Axe AO das Perpendikel iQ, und ein anderes g herab, das gq seyn mag, so wird

$$iQ = \mu.\ ik$$
und $$kQ = \nu.\ ik;$$

Und

Und da

$$gh = \frac{(\mu\varepsilon + 2\nu\delta) . Ah + \mu\gamma + \nu\beta}{2(\mu^2\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu^2\delta)}$$
$$= \frac{A. Ah + C}{2D}$$

so findet man

$$gq = \mu . (gh)$$

und $hq = \nu (gh)$

also $Qq = kh + hq - kQ$

$$= \frac{4\beta D - 2AC}{A^2 - 4\delta D} + \frac{\nu A. Ah + \nu C}{2D} - \nu . ik$$

und $ig^2 = Qq^2 + (iQ - gq)^2$

$$= Qq^2 + (\mu . ik - \mu . gh)^2$$

Es ist also die Länge des andern Durchmessers nebst dem Winkel OCo aus 438. gegeben. Weil nun die beide Durchmesser IG und ig der Lage nach gegeben sind, so nehme man IG als die Abscissenlinie an, und ziehe aus i auf IG eine grade Linie unter einem Winkel, der den MLO, welcher aus 433. bestimmt wird, zum Nebenwinkel hat; und mit dieser Linie ziehe man aus g auf eben die IG eine Parallele, so hat man die beiden zu diesen zwoen Ordinaten gehörige Abscissen, woraus nun die beiden unbekannten Größen k und λ zu bestimmen sind.

Aufg. Aus einer jeden zwischen rechtwinklichten Coordinaten ET = t, und TM = u eines Kegelschnitts AMB gegebenen Gleichung, die

Au=

$$Au^2 + Btu + Ct^2 + Du + Et + F = 0$$

sein mag, die Lage der Hauptdurchmesser, und ihre Größe zu finden.

Aufl. Man suche zuerst die Lage der Linie EQ, die mit dem einen Hauptdurchmesser gleichlaufend sei, und setze $\sin QES = m$, $\operatorname{Cos} QES = n$. Aus dem Punkt der krummen Linie M lasse man auf diese neue Axe EQ das Perpendikel MQ, und setze $EQ = p$ und $QM = q$, so wird, wenn man QR und QS zieht, und den Halbmesser $= 1$ setzt, $QR = mq$, $MR = nq$, $QS = mp$ und $ES = np$. Daher wird $t = np - mq$ und $u = mp + nq$; diese Werthe nun in der gegebenen Gleichung für den Kegelschnitt substituirt, giebt

$$\begin{aligned} &+ m^2Ap^2 + 2mnApq + n^2Aq^2 + mDp + nDq + F = 0; \\ &+ mnBp^2 - m^2Bpq - mnBq^2 + nEp - mEq \\ &+ n^2Cp^2 + n^2Bpq + m^2Cq^2 \\ &\qquad - 2mnCpq \end{aligned}$$

Ist also die Axe EQ des Kegelschnitts an deren Hauptdurchmesser gleichlaufend, so verschwindet der Coefficient des Glieds pq, und es wird

$$m^2 = \frac{2mnA - 2mnC + n^2B}{B}$$

also $$\frac{m}{n} = \frac{A - C \pm \surd((A-C)^2 + B^2)}{B};$$

Daraus erhält man eine doppelte Lage für die Linie EQ, wovon die eine auf der andern senk-

recht ist, so daß beide mit den beiden Hauptdurchmessern parallel sind.

Man nehme daher einen von beiden Werthen, und setze

$$\frac{m}{n} = \frac{A-C+\sqrt{((A-C)^2+B^2)}}{B}$$

$$= \text{tang } QES$$

woraus sich die Lage der graden Linie EQ ergiebt.

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{2(A-C)^2+B^2+2(A-C)\sqrt{((A-C)^2+B^2)}}{B^2}$$

$$1+\frac{m^2}{n^2} = \frac{1}{n^2} = \frac{2(A-C)^2+2B^2+2(A-C).\sqrt{((A-C)^2+B^2)}}{B^2}$$

$$= \frac{2(A-C)+2\sqrt{((A-C)^2+B^2)}}{B^2}.\sqrt{((A-C)^2+B^2)}$$

Folglich

$$n^2 = \frac{B^2}{(A-C)+\sqrt{((A-C)^2+B^2)}.2.\sqrt{((A-C)^2+B^2)}}$$

Oder man setze $A-C=a$, $B=b$, so wird

$$n^2 = \frac{b^2}{a+\sqrt{(a^2+b^2)}.\,2\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

$$= \frac{-a+\sqrt{(a^2+b^2)}}{2\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

$$= \frac{C-A+\sqrt{((A-C)^2+B^2)}}{2\sqrt{((A-C)^2+B^2)}}$$

und

$$\text{und } m^2 = 1 - n^2 = \frac{A - C + \surd((A-C)^2 + B^2)}{2\surd((A-C)^2 + B^2)};$$

$$m^2 - n^2 = \frac{A - C}{\surd((A-C)^2 + B^2)} = \frac{2mn\,(A-C)}{B}$$

und hieraus folgt

$$2mn = \frac{B}{\surd((A-C)^2 + B^2)}$$
$$= \sin 2QES$$

$$\text{und } n^2 - m^2 = \frac{C - A}{\surd((A-C)^2 + B^2)}$$
$$= \operatorname{Cos} 2QES;$$

Die Gleichung zwischen p und q wird also so aussehen

$$+ p^2 . (A + C + \surd((A-C)^2 + B^2)) + 2p(mD + nE) + 2F$$
$$+ q^2 . (A + C - \surd((A-C)^2 + B^2)) + 2q(nD - mE) = 0,$$

weil

$$m^2 A + mnB + n^2 C = \frac{A + C + \surd((A-C)^2 + B^2)}{2};$$

und

$$n^2 A - mnB + m^2 C = \frac{A + C - \surd((A-C)^2 + B^2)}{2};$$

Nun sei ferner AP = x, PM = y, AD = f, und DE = g, so wird p = x + f, und q = y + g. Es sei der Kürze wegen $\surd((A-C)^2 + B^2) = H$, so wird

$$+x^2.(A+C+H)+2fx(A+C+H)+f^2(A+C+H)$$
$$+y^2.(A+C-H)+2x(mD+nE)+2f(mD+nE)$$
$$+2gy(A+C-H)+g^2(A+C-H)=0;$$
$$+2y(mD-mE)+2g(nD-mE)$$
$$+2F$$

Wenn nun A des Kegelschnitts Mittelpunkt vorstellt, so muß

$$f.(A+C+H)+mD+nE=0$$

also

$$f=\frac{-mD-nE}{A+C+H}, \text{ und}$$

$$g=\frac{mE-nD}{A+C-H}$$

sein, und es wird

$$x^2(A+C+H)+y^2(A+C-H)=\frac{(mD+nE)^2}{A+C+H}$$
$$+\frac{(mE-nD)^2}{A+C-H}-2F=0;$$

oder, man multiplicire mit $(A+C+H)\times(A+C-H)=4AC-B^2$, so erhält man $x^2(A+C+H).(4AC-B^2)+y^2.(A+C-H).(4AC-B^2)=m^2AD^2+2mnADE+n^2AE^2+m^2AE^2-2mnADE+n^2AD^2+n^2CD^2+2mnCDE+n^2CE^2+m^2CE^2-$

2mn

$2mnCDE + n^2CD^2 - 2F(4AC - B^2) - m^2HD^2 - 2mnHDE - n^2HE + m^2HE - 2mnHDE + n^2HD^2$

oder wenn man diese Werthe substituirt:

$$m^2 + n^2 = 1;\ m^2 - n^2 = \frac{A-C}{H};\ 2mn = \frac{B}{H};$$

so wird

$$x^2(A+C+H).(4AC-B^2) + y^2(A+B-H).(4AC-B^2) = 2AE^2 + 2CD^2 - 2BDE - 2F(4AC-B^2)$$

Für $y = 0$ wird x dem halben Hauptdurchmesser gleich, der mit EQ gleichlaufend ist und die Zwergaxe seyn mag; es wird demnach

$$x^2 = \frac{2AE^2 + 2CD^2 - 2BDE}{(A+C+H).(4AC-B^2)} - \frac{2F(4AC-B^2)}{A+C+H}$$

folglich die halbe Zwergaxe =

$$\frac{\sqrt{(2AE^2 + 2CD^2 - 2BDE - 8ACF + 2B^2F)}}{\sqrt{((4AC-B^2).(A+C+\sqrt{((A-C)^2+B^2)}))}}$$

und die halbe Axe, deren Lage auf die grade Linie EQ senkrecht ist, wird =

$$\frac{\sqrt{(2AE^2 + 2CD^2 - 2BDE - 8ACF + 2B^2F)}}{\sqrt{[(4AC-B^2).(A+C-\sqrt{((A-C)^2+B^2)})]}}$$

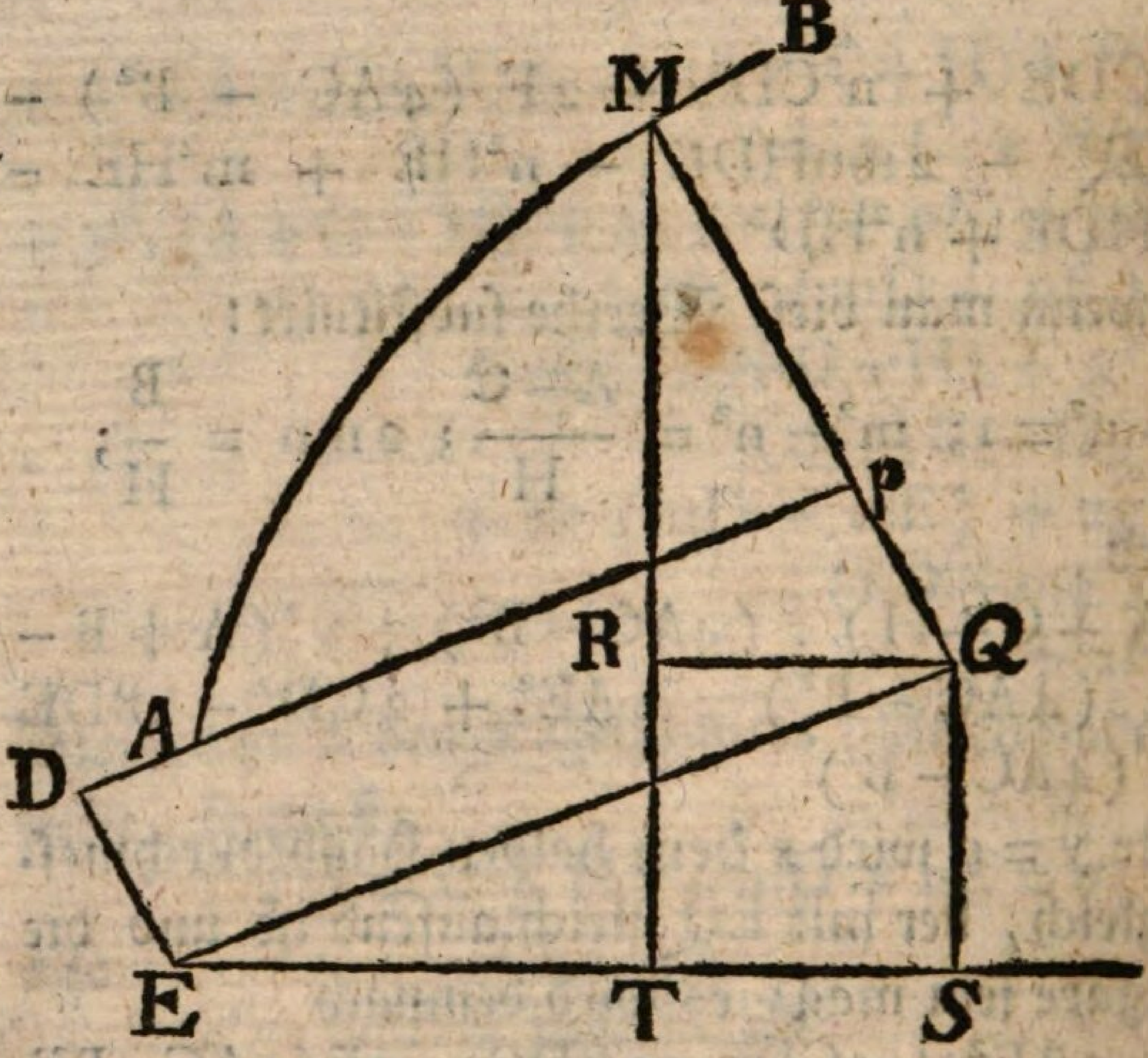
Die Axe also, welche der EQ gleichlaufend ist, verhält sich zu der, welche auf EQ senkrecht ist,

wie $\sqrt{(A+C-\sqrt{((A-C)^2+B^2)})}$

zu $\sqrt{(A+C+\sqrt{((A-C)^2+B^2)})}$;

d. i. wie

$A+C-\sqrt{((A-C)^2+B^2)}$ zu $\sqrt{(4AC-B^2)}$



§. 460.

Da, wenn ω die Abscisse von der krummen Linie an bis an den Mittelpunkt bedeutet, allemal $ig = 2\omega$ ist, so folgt aus 454.

$$2\omega = -k : \lambda$$

oder $\omega = -k : 2\lambda;$

Nun ist (453) $z^2 = k\omega + \lambda\omega^2$.

Setzt man also statt ω ihren Werth $-k : 2\lambda$, so erhält man $z^2 = k. (-k : 2\lambda) + \lambda \frac{k^2}{4\lambda^2} = -\frac{k^2}{2\lambda} + \frac{k^2}{4\lambda} = \frac{-\frac{1}{4}k^2}{\lambda}$, folglich

$$z = \pm r\left(\frac{-1.\frac{1}{4}k^2}{\lambda}\right)$$

$$= \pm \tfrac{1}{2} k\, r(-1 : \lambda)$$

Hier

Hier ist $-1:\lambda$ verneint, wenn λ bejaht ist; folglich z für ein bejahtes λ unmöglich; ist aber λ verneint, so ist $-1:\lambda$ bejaht, also

$$z = \pm \tfrac{1}{2} k\, r\left(\frac{-1}{\lambda}\right)$$

eine wirkliche Größe.

§. 463.

Es ist 439.

$$\text{tang Mlo} = \frac{2\pi^2\zeta + 2\pi\varepsilon + 2\delta}{\pi^2\varepsilon + 2\pi\delta - 2\pi\zeta - \varepsilon}$$

Soll nun dieser Werth $= \infty$ unendlich werden, wie für Mlo $= 90°$ erfodert wird, so muß dieses Bruchs Nenner $\pi^2\varepsilon + 2\pi\delta - 2\pi\zeta - \varepsilon = 0$ werden, folglich

$$\varepsilon\pi^2 + 2(\delta - \zeta)\pi = \varepsilon;$$

Es sei also $\delta - \zeta = \tfrac{1}{2}\beta$, so ist

$$\varepsilon\pi^2 + \beta\pi = \varepsilon$$

mithin $$\pi^2 + \frac{\beta\pi}{\varepsilon} = 1;$$

und diese quadratische Gleichung aufgelöst.

$$\pi = \frac{-\beta}{2\varepsilon} \pm r\left(\frac{\beta^2}{4\varepsilon^2} + 1\right)$$

oder den Werth von β substituirt,

$$\pi = \frac{-2(\delta - \zeta)}{2\varepsilon} \pm r\left(\frac{4(\delta - \zeta)^2}{4\varepsilon^2} + 1\right)$$

$$= \frac{\zeta - \delta}{\varepsilon} \pm r\left(\frac{(\delta - \zeta)^2}{\varepsilon^2} + 1\right)$$

Da nun $\frac{(\delta - \zeta)^2}{\varepsilon^2} = \left(\frac{\delta - \zeta}{\varepsilon}\right)^2$ allemal bejaht, folglich $\sqrt{\left(\left(\frac{\delta - \zeta}{\varepsilon}\right)^2 + 1\right)}$ allemal möglich ist, so muß auch allemal ein Durchmesser für Mlo = 90° möglich sein. Man kann leicht sehen, woher es komme, daß π einen doppelten Werth hat. Es stellt nämlich in 437. π die Tangente des Winkels vor, den eine zu dem Durchmesser gehörige Sehne mit der Abscissenlinie AH macht. Fällt nun diese Sehne in den Mittelpunkt C, z. E. pl in CV, so wird diese Sehne CV selbst zu einem Durchmesser (444), der nämlich denjenigen Sehnen zugehört, die dem Durchmesser ig gleichlaufend sind. Es giebt demnach allemal zween verschiedene Durchmesser, die ihre zugeordneten Sehnen unter einerlei Winkel schneiden, mithin auch allemal ein Paar Durchmesser, wovon jeder die ihm zugeordneten Sehnen senkrecht durchschneidet, so, daß man sowohl VC als ig für einen solchen Durchmesser annehmen kann. Nimmt man nun ig dafür an, so sind pl, VC u. s. w. in der Reihe der zugeordneten Sehnen, und π stellt in diesem Fall die Tangente des Winkels vor, den die Linien pl, VC, mit AH machen, also die tang MpH. Nimmt man aber VC als den Durchmesser an, so liegt ig in der Reihe der zugeordneten Sehnen,

und π bedeutet nun die Tangente des Winkels, welchen io mit AH macht, d. i. die tang CoO.

§. 465.

Aus 419. folgte in 431.

$$y^2 + \frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta} y + \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0,$$

also

$$y^2 + \frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta} y + \frac{(\varepsilon x + \gamma)^2}{4\zeta^2} = \frac{(\varepsilon x + \gamma)^2}{4\zeta^2}$$

$$- \frac{\delta x^2 + \beta x + \alpha}{\zeta} = \frac{(\varepsilon x + \gamma)^2 - 4\zeta(\delta x^2 + \beta x + \alpha)}{4\zeta^2}.$$

und daher

$$y + \frac{\varepsilon x + \gamma}{2\zeta} = \frac{\sqrt{((\varepsilon x + \gamma)^2 - 4\zeta(\delta x^2 + \beta x + \alpha))}}{2\zeta}$$

Folglich I

$$y = \frac{-(\varepsilon x + \gamma) \pm \sqrt{((\varepsilon x + \gamma)^2 - 4\zeta(\delta x^2 + \beta x + \alpha))}}{2\zeta}$$

Zu II.

Also ist

$$z = \varepsilon^2 x^2 + 2\gamma\varepsilon x + \gamma^2 - 4\zeta\delta x^2 - 4\beta\zeta x - 4\alpha\zeta,$$

Daher der Coefficient von

$$x = \varphi = 2\gamma\varepsilon - 4\zeta\beta$$

und die Summe der Glieder, die weder x^2 noch x enthalten =

$$p = \gamma^2 - 4\alpha\zeta$$

Zu III.

Es ist nämlich

$$\frac{z}{x^2} = \varepsilon^2 - 4\zeta\delta + \frac{\varphi}{x} + \frac{p}{x^2};$$

Wenn nun x unendlich wüchse, so nähme $\frac{\varphi}{x}$ und $\frac{p}{x^2}$ unendlich ab, und $\frac{z}{x^2}$ näherte sich unendlich dem Werthe $\varepsilon^2 - 4\zeta\delta$, und so kommt also für ein unendlich großes x der Quotient $\frac{z}{x^2}$ dem Werthe $\varepsilon^2 - 4\zeta\delta$ näher, als jede gegebene Größe.

Zu IV.

Wenn nun $\varepsilon^2 - 4\zeta\delta$ bejaht ist, und man nimmt x so groß an, daß $\frac{\varphi}{x} + \frac{p}{x^2}$ zu $\varepsilon^2 - 4\zeta\delta$ gesetzt das Ganze nicht verneint machen können, so ist $\frac{z}{x^2}$ bejaht; weil nun x^2 allemal bejaht ist, so muß z bejaht seyn, folglich ist

$$y = \frac{-(\varepsilon x + \gamma) \pm \sqrt{z}}{2\zeta}$$ möglich, so groß auch x genommen wird.

Zu V.

Wenn $\varepsilon^2 - 4\zeta\delta$ verneint ist, so läßt sich wieder x in $\frac{\varphi}{x} + \frac{p}{x^2}$ so groß annehmen, daß, wenn

auch

auch beide bejaht wären, daß ganze $\frac{z}{x^2}$ doch nicht bejaht würde. Also ist das z verneint, und $y = \frac{-(\varepsilon x + \gamma) \pm \sqrt{z}}{2\zeta}$ unmöglich.

Zu VI.

Hier ist $\frac{z}{x} = \varphi + \frac{p}{x}$, welches sich, wenn x unendlich wächst, dem Werthe φ unendlich nähert.

Zu VIII.

Wenn $\varepsilon = 0$, so muß für die Hyperbel $-4\delta\zeta$ bejaht sein, also müssen δ und ζ entgegengesetzte Zeichen haben. (IV.) Für die Ellipse muß $-4\zeta\delta$ verneint sein, und δ und ζ haben also bei ihr einerlei Zeichen V. wornach der Druckfehler im Buche zu verbessern ist. Für die Parabel soll $\zeta\delta = 0$ sein; wären nun ζ, δ, zugleich $= 0$, so käme eine Gleichung vom ersten Grad heraus, welches nicht sein darf, also kann nur eine von beiden $= 0$ sein.

§. 469.

Nimmt man nämlich auf BC so viele Punkte H, als man nur will, zieht von ihnen nach A zu grade Linien HA, und nimmt auf jeder solchen Linie von A nach H zu ein Stück AM, das so groß ist, als das Stück HI, welches von H bis an die Peripherie des Kreises reicht, so erhält man

man eine Reihe von Punkten M, die in einer gewissen krummen Linie AMN liegen, welche die Cissois heißt. Sie heißt die Cissois des Diokles, weil dieser sie schon vor mehr als 1400. Jahren erfunden hat.

§. 474.

Da $y = a + \sqrt[3]{au^2}$, so ist y für $u = 0$, also für $a = x$ am kleinsten. Folglich ist für $AB = a$ das kleinste y dasjenige, dessen zugehörige Abscisse = AB ist, und dieses steht also in B. Die Größe dieses y, welches in B steht, ergiebt sich also, wenn man nur in der Gleichung $y = a + \sqrt[3]{au^2}$, $u = 0$ setzt, dadurch erhält man

$$y = a + \sqrt[3]{0}$$
$$= a$$

also $BD = AB$;

Für $u = -a$ ist $x = 2a$; setzt man nun $-a$ statt u in die Gleichung, so erhält man

$$y = a + \sqrt[3]{a.\, a^2}$$
$$= a + \sqrt[3]{a^3}$$
$$= a + a$$
$$= 2a;$$

also ist für $x = 2a$ auch $y = 2a$; nimmt man also Bk der BA gleich und entgegengesetzt, so ist

$$KB : BD = a : a = kA : AC$$

und C, D und k liegen also in einer graden Linie. Ueberhaupt muß allemal, wenn y einen rationalen Werth haben soll, $u^2 = \alpha^3 a^2$, d. i. der Coeffi-

cient

cient von a^2 muß ein Cubus sein, denn weil u^2 noch mit a in der Gleichung für y multiplicirt wird, so wird dadurch die Größe unter dem Wurzelzeichen $= \alpha^3 a^3$ ein Cubus, also $\sqrt[3]{au^2} = \sqrt[3]{\alpha^3 a^3} = \alpha a$, und daher $y = a + \sqrt[3]{au^2} = a + \alpha a$ rational. Nun kann aber in dem Werth für u^2, für den y rational wird, der Coefficient von a^2 nicht eher $= \alpha^3$ werden, bis $(a - x)^2 = (\alpha^{\frac{3}{2}} a)^2$, also $a - x = \alpha^{\frac{3}{2}} a$ wird; aber $\alpha^{\frac{3}{2}} = \alpha^1 . \alpha^{\frac{1}{2}} = \alpha\sqrt{\alpha}$; folglich muß, wenn $u^2 = \alpha^3 a^2$ sein soll, $a - x = (\alpha\sqrt{\alpha})\, a$ sein, d. i. α muß eine Quadratzahl sein, damit sich die Wurzel aus ihr genau angeben läßt. Heißt man demnach den Coefficienten von a^2, β, so muß für ein rationales y,

$$u^2 = \beta a^2$$

sein, so, daß β ein Cubus und zugleich eine Quadratzahl ist; nun ist der allgemeine Ausdruck einer solchen Zahl γ^6, also muß für ein rationales y, u^2 oder $(a - x)^2 = \gamma^6 a^2 = (\gamma^3 a)^2$, mithin

$$a - x = \gamma^3 a \text{ oder}$$
$$x = (1 - \gamma^3)\, a \text{ sein.}$$

Für diesen Fall wird nämlich

$$y = a + \sqrt[3]{a\,\gamma^6 a^2} = a + \sqrt[3]{a^3\gamma^6}$$
$$= a + a\gamma^2 = a\,(1 + \gamma^2)$$

Es sei z. B. AB = a = 2, so ist das zu x = − 14 gehörige y = 10; es ist nämlich für diesen Fall

$$\gamma^3 = \frac{a - x}{a}$$
$$= \frac{2 + 14}{2}$$
$$= 8$$

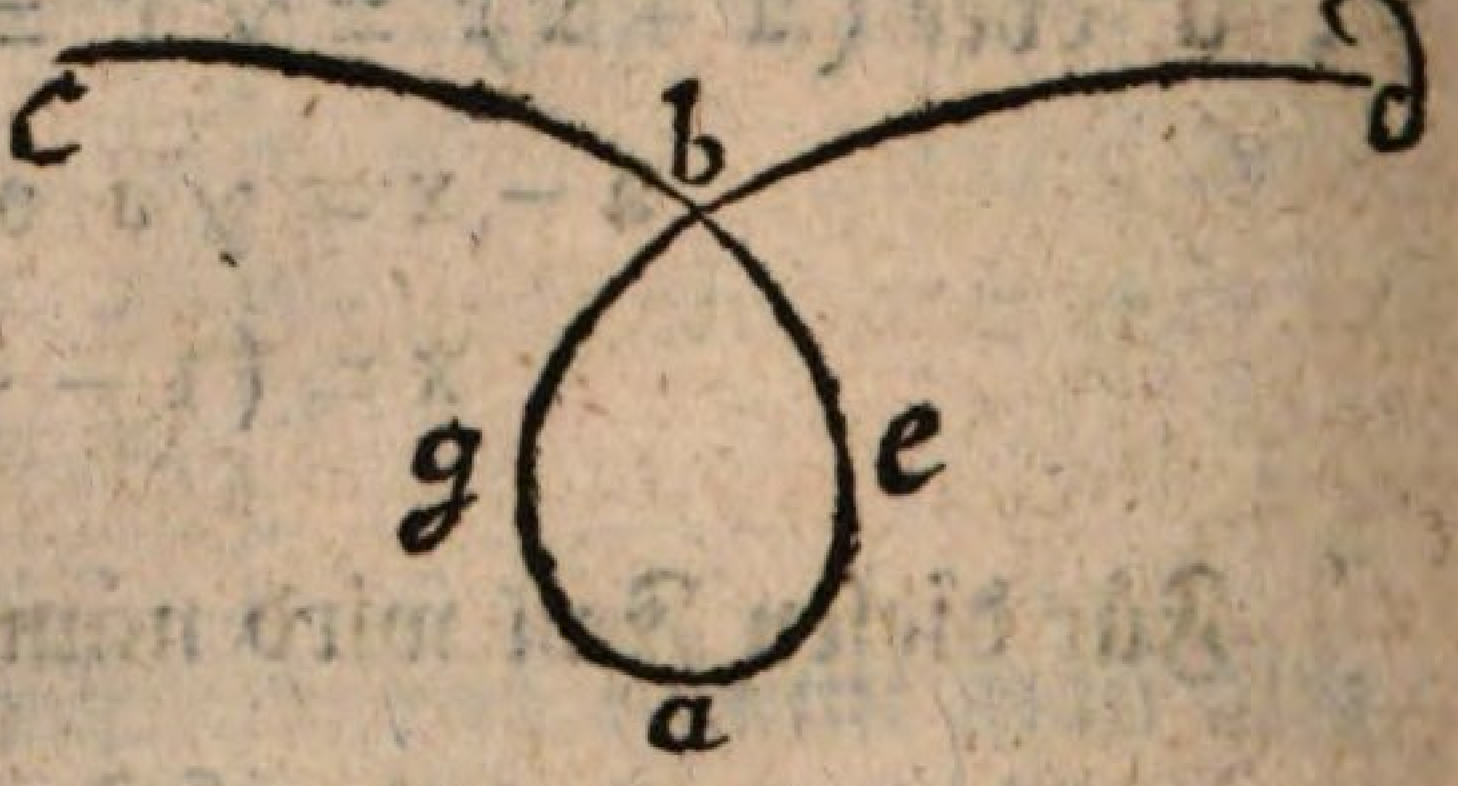
also $\gamma = 2$

und daher

$$y = a + \sqrt[3]{a\,(a - x)^2}$$
$$= a + \sqrt[3]{a.\ \gamma^6 a^2}$$
$$= 2 + \sqrt[3]{512}$$
$$= 2 + 8$$
$$= 10$$

§. 478.

Unter einem Knoten versteht man eine krumme Linie cbeagbd, deren beide Schenkel cbea und dbga einander in b durchschneiden.



Daß nun die Linie λCDαδCμ auf diese Art sich krümmen muß, erhellet so. In C und α wird y = 0 (482), aber für jedes verneinte x, das > − b, und < − a ist, giebt es zwei gleiche entgegengesetzte y. Denn es sei Cα = c,

so ist $a = b + e$, und f bedeute eine Größe, die $< e$, so ist x, welches $< -(b + e)$ und $> -b$ ist, $= -(b + f)$; setzt man nun in 481. $b + e$ statt a, und $-(b + f)$ statt x, so erhält man

$$y = \frac{f}{b + f} \sqrt{(2be + e^2 - 2bf - f^2)};$$

weil nun $f < e$, so ist $2b(e - f)$ und $e^2 - f^2$, also die ganze Größe unter dem Wurzelzeichen bejaht, und daher y eine wirkliche Größe, die wegen des Wurzelzeichens zweene gleiche entgegengesetzte Werthe hat. Demnach giebt es für jedes x, das $< a$ und $> -b$ ist, zwei gleiche entgegengesetzte y. Für $f > e$ wird $e^2 - f^2$ und $2b(e - f)$ verneint, folglich y wegen der Quadratwurzel aus einer verneinten Größe unmöglich. Da also $x = -(b + f)$ für $f > e$ über α hinausgeht, so wird y für $x > a$ unmöglich, mithin kann hinter α nichts mehr von der krummen Linie liegen. Die beiden Schenkel $C\delta\alpha$ und $CD\alpha$ schließen sich demnach in α, und da für jedes x, das kleiner als b ist, y einen bejahten Werth hat, so muß der Schenkel $\alpha\delta C$ durch C, und aDC durch eben diesen Punkt C weiter fortgehen, d. i. die krumme Linie $CD\alpha\delta$ muß zu einem Knoten werden. Setzt man $f = \frac{1}{2}e$, so ist das zu $x = -(b + f)$ gehörige y die halbe Breite des Knotens, diese ist also, wenn man in der letzten Gleichung für y $f = \frac{1}{2}e$ setzt,

$$= \frac{\frac{1}{2}e}{b+\frac{1}{2}e}\sqrt{(2be+e^2-be-\frac{1}{4}e^2)}$$

$$= \frac{e}{2b+e}\sqrt{(be+\frac{3}{4}e^2)}$$

und daher des Knotens ganze Breite =

$$\frac{2e}{2b+e}\sqrt{(be+\frac{3}{4}e^2)}$$

Nun ist aber $e = a - b$, also

die Br. des Kn. $= \frac{2(a-b)}{2b+a-b}.\sqrt{\left(b(a-b)+\frac{3(a-b)^2}{4}\right)}$

$$= \frac{2(a-b)}{a+b}.\sqrt{(ab-b^2+\frac{3}{4}a^2-\frac{3}{2}ab+\frac{3}{4}b^2)}$$

$$= \frac{2(a-b)}{a+b}.\sqrt{(\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{2}ab-\frac{1}{4}b^2)}$$

$$= \frac{2(a-b).\sqrt{(3a^2-2ab-b^2)}}{2(a+b)}$$

$$= \frac{(a-b).\sqrt{(3a^2-2ab-b^2)}}{a+b};$$

und wird also $= 0$ für $a = b$, oder verwandelt sich in diesem Fall in eine Spitze wie fig. 23. Auch hieraus ist klar, daß ein Perpendikel auf BF in einer Entfernung von $E = \frac{(a-b)\sqrt{(3a^2-2ab-b^2)}}{2(a+b)}$ gezogen, eine Tangente am Knoten ist.

§. 488.

§. 488.

Es ist (481.)

$$y = \frac{(b+x) \cdot \sqrt{(a^2-x^2)}}{x},$$

also

$$\frac{y^2x^2}{(b+x)^2} + x^2 = a^2$$

und

$$a = \pm \sqrt{\left(\frac{y^2x^2}{(b+x)^2} + x^2\right)}$$

daß also a über und unter BF liegt.

§. 489.

Statt der Zeilen von Nämlich bis vorstellt lese man so:

„Es ist nämlich $a^2 - x^2 = (a-x) \cdot (a+x)$, „und daher eigentlich aus 481.

$$y = \frac{(b+x) \cdot \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x}$$

$$= \frac{(b+x) \cdot \sqrt{(a-x)} \cdot \sqrt{(a+x)}}{x}$$

Dieser Werth muß verschwinden, wenn nur einer seiner Factoren = o ist, welches daher hier in drei Fällen geschehen muß 1.) für $b+x = o$ oder $x = -b$; 2.) für $\sqrt{(a-x)} = o$ oder $x = a$, und 3.) für $\sqrt{(a+x)} = o$ oder für $x = -a$; da aber hier $a = b$ ist, so wird y an eben dem Punkt im 1ten Fall = o, an dem es auch im 3ten Fall = o wird, oder der Endpunkt der Linie $x = -b$, und der Endpunkt der Linie $x = -a$ fallen hier für $a = b$

in einem einzigen Punkt der krummen Linie zusammen.“ Also wird hier für $x = - a$ in der That y zweimal $= 0$; einmal im eigentlichen Verstand für $x = - a$ wegen des Factors $\sqrt{(a + x)}$, und dann zum zweitenmal eigentlich für $x = - b$, welches aber an eben der vorigen Stelle ist, weil $- b = - a$; und daß auf diese Art y zum zweytenmal an eben der Stelle $= 0$ wird, geschieht nach dem Ausdruck im Buche wegen des Factors $a + x$, weil nämlich hier statt a eigentlich das gleichgültige b stehen sollte.

§. 495.

Zu V.

Die Menge aller Glieder, die in einer Gleichung für eine Linie von der nten Ordnung vorkommen können, ist also $= \frac{(n + 2) . (n + 1)}{2}$ $= \frac{n^2 + 3n}{2} + 1$, und eben so viele Coefficienten kommen auch in ihr vor; da man aber wie in 427. ein Glied von seinem Coefficienten dadurch befreien kann, daß man durch ihn überall dividirt, wie 427. durch ζ, so ist klar, daß nach dieser Wegschaffung nur noch $\frac{n^2 + 3n}{2}$ Coefficienten vorhanden sind; soll nun die Gestalt der krummen Linie bestimmt sein, so muß man diese $\frac{(n + 3) . n}{2}$ Coefficienten finden können; dazu wird aber erfodert,

fodert, daß man auch $\frac{(n + 3) . n}{2}$ verschiedene Gleichungen für sie habe (205. 207.) wie man in 427. für die fünf unbekannte Coefficienten $\frac{\alpha}{\zeta}, \frac{\beta}{\zeta}, \frac{\gamma}{\zeta}, \frac{\delta}{\zeta}, \frac{\varepsilon}{\zeta}$ fünf Gleichungen hatte. Nun geben sich diese verschiedene Gleichungen, wie man aus 427. ersehen kann, blos dadurch, daß man immer andere Coordinaten in die allgemeine Gleichung vom nten Grad setzt, also ist klar, daß man für die $\frac{(n + 3) . n}{2}$ verschiedene Gleichungen zwischen den Coefficienten, auch $\frac{(n + 3) . n}{2}$ verschiedene Paare von Coordinaten haben müsse, wie man a. a. O. für die fünf Gleichungen zwischen den Coefficienten auch fünf verschiedene Paare von Coordinaten hatte. Aber jedes Paar Coordinaten giebt einen Punkt der krummen Linie; soll also die Gestalt einer krummen Linie der nten Ordnung bestimmt sein, so werden $\frac{(n + 3) . n}{2}$ Punkte dazu erfodert. Also läßt sich durch $\frac{(n + 3) . n}{2}$ Punkte nur eine einzige Linie der nten Ordnung verzeichnen, und zwo Linien der nten Ordnung können einander höchstens in $\frac{(n + 3) . n - 2}{2}$

Punkten durchschneiden. Daraus läßt sich die Aufgabe auflösen: unter allen krummen Linien, die sich durch m Punkte beschreiben lassen, die Ordnung derjenigen zu finden, deren Natur durch diese m Punkte völlig bestimmt ist. Man hat nämlich, wenn die gesuchte Ordnung n heißt,

$$m = \frac{(n + 3) \cdot n}{2}$$

also $2m = n^2 + 3n$

und $2m + \frac{9}{4} = n^2 + 3n + \frac{9}{4}$; (Q.

Blos für sich betrachtet wäre nun hier allerdings sowohl

1.) $n^2 + 3n + \frac{9}{4} = (-n - \frac{3}{2})^2$;

als 2.) $n^2 + 3n + \frac{9}{4} = (n + \frac{3}{2})^2$

weil sowohl

$$\sqrt{n^2} = -n$$

als $\sqrt{n^2} = +n$

wenn es nicht besondere Umstände entscheiden, welcher von beiden Werthen in einem gegebenen Fall eigentlich statt finde. Hier aber ist dieses aus dem Werth für m entschieden, welcher zeigt, daß hier n^2 aus der Wurzel $+n$ entstanden ist, und daß man also hier nur die Gleichung no. 2. gebrauchen müsse. Demnach ist in Q nicht

$$2m + \frac{9}{4} = (\pm (n + \frac{3}{2}))^2$$

sondern $2m + \frac{9}{4} = (+ (n + \frac{3}{2}))^2$

wie (230.), also

$$+\sqrt{(2m + \frac{9}{4})} = n + {}^3$$

und

und $n = -\frac{3}{2} + \sqrt{(2m + \frac{9}{4})}$

$$= \frac{-3 + \sqrt{(8m + 9)}}{2}$$

Ex. Zu finden, von der wievielten Ordnung die Linie ist, deren Gestalt durch 9. Punkte bestimmt ist, setze man m = 9, dieß giebt

$$n = \frac{-3 + \sqrt{(7^2 + 9)}}{2} = \frac{-3 + 9}{2} = 3$$

oder die Linie, deren Gestalt durch 9. Punkte bestimmt wird, ist eine von der dritten Ordnung.

Auch ist aus dem Werth von n, der allemal eine ganze Zahl sein muß, klar, daß keiner krummen Linie ihre Gestalt durch eine andere Anzahl von Punkten bestimmt ist, als für die 8m + 9 eine Quadratzahl ist.

§. 496. *

Um n unbekannte Größen zu bestimmen, sind zwar n Gleichungen hinreichend, aber doch mit der Einschränkung, daß sie alle von einander verschieden sein müssen, und keine die andere schon in sich faßt, weil in dem Fall, wo m + 1 Gleichungen völlig mit einander überein kämen, n − m Größen unbestimmt blieben.

Die Anzahl von $\frac{(n + 3) n}{2}$ Punkten, wodurch die krumme Linie der nten Ordnung be-

stimmt wird, oder die Verhältniß der $\frac{(n+3)n}{2}$ $+1$ Coefficienten gegen einander soll aus den $\frac{(n+3)n}{2}$ Gleichungen bestimmt werden. Giebt es also unter diesen Gleichungen einige, die schon unter einer der übrigen begriffen sind, so reichen $\frac{(n+3).n}{2}$ Punkte zu Bestimmung der Linie nicht zu.

Die Möglichkeit eines solchen Falls zu beweisen, betrachte man die Linien der zwoten Ordnung, die durch folgende allgemeine Gleichung

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0;$$

bestimmt werden. Es seien fünf Punkte gegeben, durch die man eine Linie von dieser Ordnung beschreiben soll. Durch zween solcher Punkte ziehe man die Axe, und von einem dieser beiden ziehe man nach einem dritten, unter was für einem Winkel es auch sei, eine Ordinate. Es sei aber

$$x = 0;\ a;\ 0;\ c;\ e;$$
$$y = 0;\ 0;\ b;\ d;\ f;$$

so ergeben sich daraus folgende fünf Gleichungen:

1.) $\zeta = 0;$

2.) $\alpha a^2 + \delta\alpha + \zeta = 0$

3.) $\gamma b^2 + \varepsilon b + \zeta = 0$

4.) $\alpha c^2 + \beta cd + \gamma d^2 + \delta c + \varepsilon d + \zeta = 0;$

5.) $\alpha e^2 + \beta ef + \gamma f^2 + \delta e + \varepsilon f + \zeta = 0;$

Aus

Aus 1, 2 und 3 erhält man $\zeta = 0$; $\delta = -\alpha a$; $\varepsilon = -\gamma b$, und daher, wenn man diese Werthe in 4. und 5. substituirt,

$$\alpha c^2 + \beta cd + \gamma d^2 - \alpha ac - \gamma bd = 0;$$
$$\alpha e^2 + \beta ef + \gamma f^2 - \alpha ae - \gamma bf = 0;$$

oder

$$\beta = \frac{\alpha c(a-c) + \gamma d(b-d)}{cd}$$
$$= \frac{\alpha e(a-e) + \gamma f(b-f)}{ef}$$

Diese beide Werthe werden zu einem einzigen Ausdruck, wenn

$$\frac{a-c}{d} = \frac{a-e}{f};$$

und $$\frac{b-d}{c} = \frac{b-f}{e};$$

oder wenn $$a = \frac{cf-de}{f-d};$$

und $$b = \frac{de-cf}{e-c}$$

Es erhellet also, daß fünf gegebene Punkte eine solche Lage gegen einander haben können, daß die Linie der zwoten Ordnung unbestimmt bleibt. Offenbar findet dieses statt, wenn vier von den gegebenen Punkten sich in einer graden Linie befinden. Aus dem vorhergehenden ist $f = \frac{d(a-e)}{a-c} = b - \frac{e(b-d)}{c}$ und $(c-e)(ad$

 $- ab$

$- ab + bc) = 0$. Wenn nun $e = c$, so wird auch $f = d$, und es fallen zweene Punkte zusammen. Es sei also $ad - ab + bc = 0$, oder $d = b - \frac{bc}{a}$, so findet man $f = b - \frac{be}{c}$, und es liegen demnach vier Punkte in einer graden Linie.

Eben so würde der Aufgabe durch eine grade Linie ein Genügen geschehen, in der fünf gegebene Punkte lägen.

Auf eben diese Art kann eine Gleichung für Linien der dritten Ordnung entweder drei grade Linien, oder eine grade, die mit einem Kegelschnitt verbunden ist, in sich fassen. Also können auch neun Punkte gegeben sein, durch die sich unendlich viele Linien von dieser Ordnung ziehen lassen, welches alles von Linien einer jeden Ordnung, wie im angeführten Exempel, leicht zu begreifen ist.

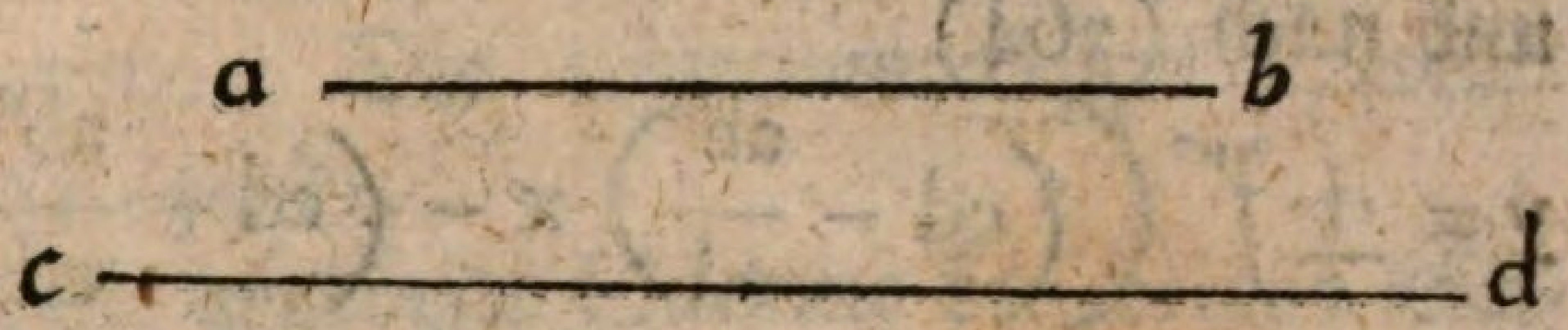
Schneiden also zwo Linien der dritten Ordnung einander in neun Punkten, so müssen diese neun Punkte eine solche Lage gegen einander haben, daß sie zu Bestimmung einer Linie der dritten Ordnung nicht hinreichend sind, d. i. daß in der allgemeinen Gleichung, wenn man sie auf diese Punkte anwendet, allemal ein Coefficient unbestimmt bleibt.

§. 499.

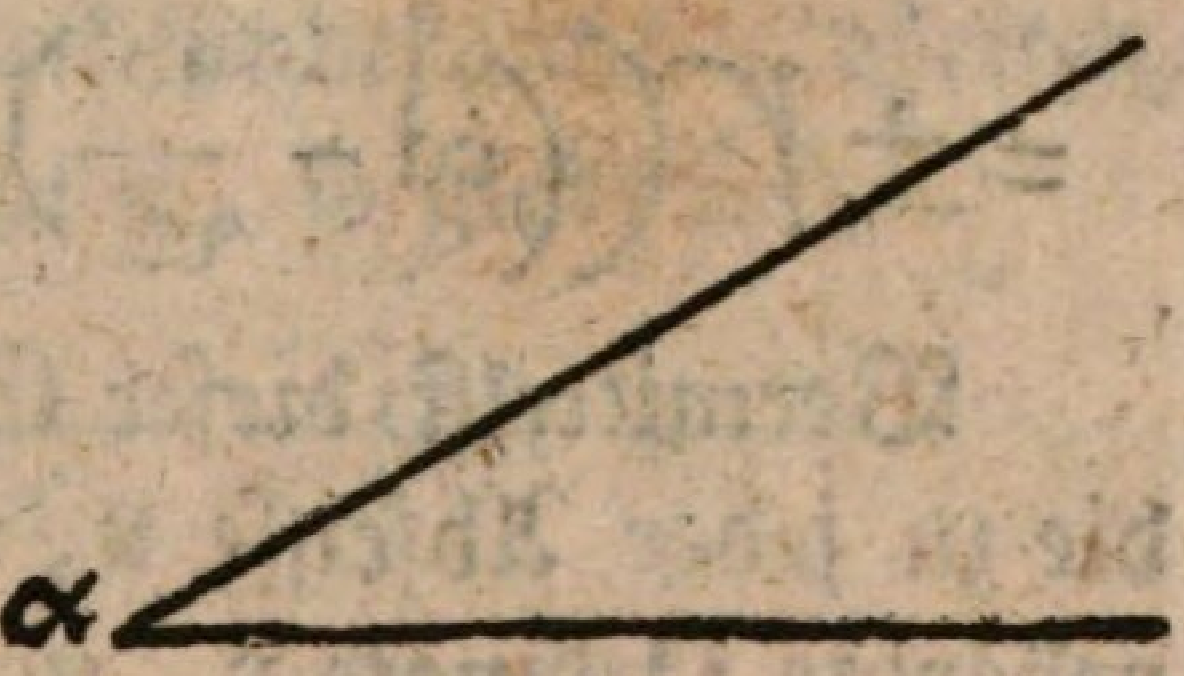
§. 499.

Es ist von einem Dreieck eine Seite nebst dem gegenüberstehenden Winkel und die Summe der beiden übrigen Seiten gegeben; man soll den Ort des dritten Scheitels finden.

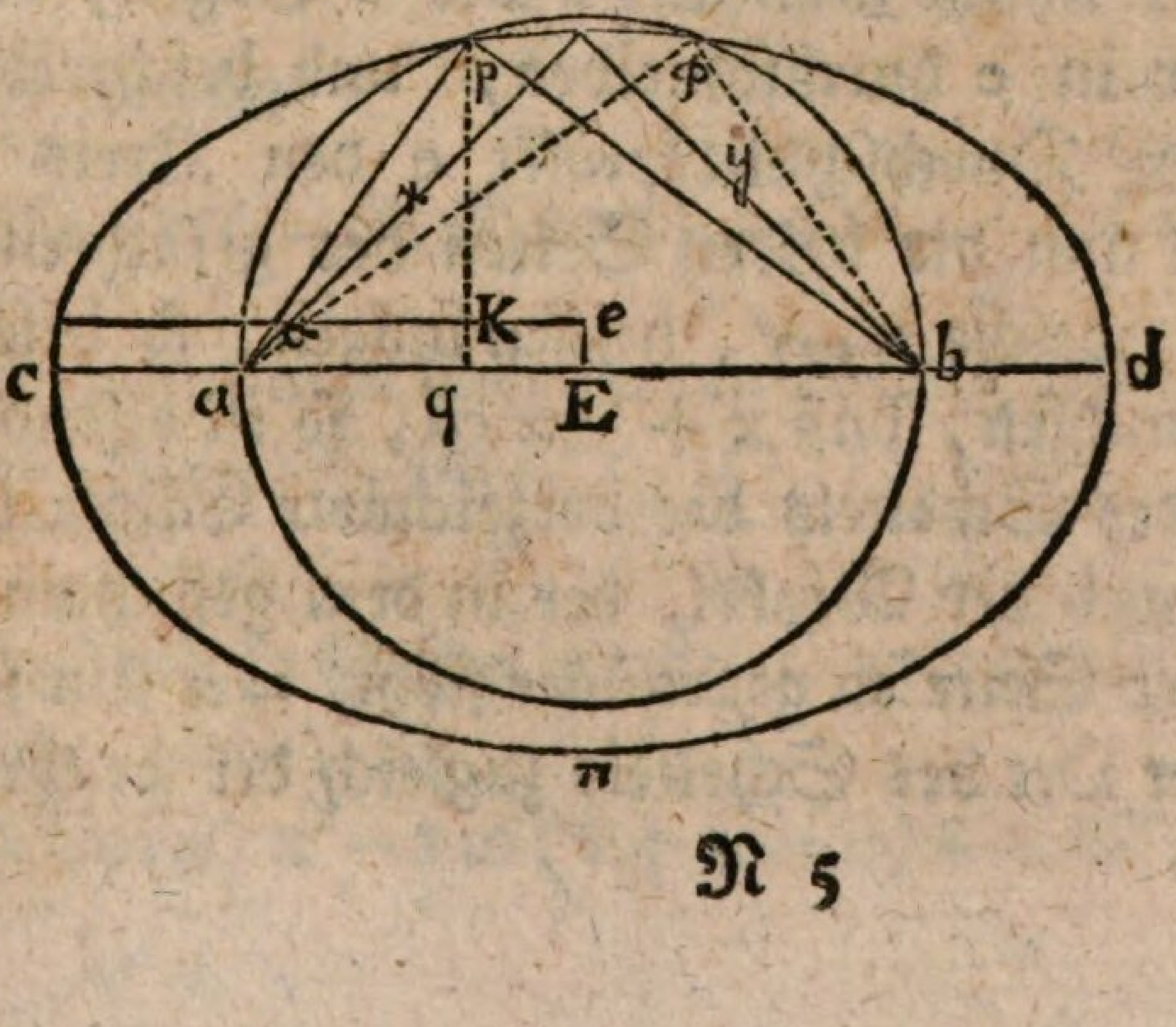
Aufl. ab sei die gegebene



Seite, α der gegenüberstehende Winkel, und cd die Summe der beiden andern Seiten, so verfahre man so. Auf



cd trage man die ab so, daß $ac = bd$, und sehe a und b als Brennpunkte einer Ellipse an. Die kleine Axe der Ellipse, deren Brennpunkte a, b, und große Axe cd ist, heiße β, so ist $\beta^2 = cd^2 - ba^2$ (376).



Daraus giebt sich der Parameter

$$b = \frac{cd^2 - ba^2}{cd}$$

$$= cd - \frac{ab^2}{cd} \quad (366)$$

und nach (364)

$$y = \pm \sqrt{\left(\left(cd - \frac{ab^2}{cd}\right) x - \left(cd - \frac{ab^2}{cd}\right) x^2 : cd\right)}$$

$$= \pm \sqrt{\left(\left(cd - \frac{ab^2}{cd}\right) x + \left(\frac{ab^2}{cd^2} - 1\right) x^2\right)};$$

Vermittelst dieser Gleichung suche man nun die zu jeder Absciße x, die man auf cd nimmt, gehörige Ordinate y, und verzeichne solchergestalt die Ellipse cpφdπc. Aus 153. Anm. suche man des zu ab und α gehörigen Kreises Halbmesser, der sich = $\frac{ab}{2 \sin \alpha}$ ergiebt; mit diesem Halbmesser mache man aus a und b Bogen, die einander in e durchschneiden, und beschreibe aus diesem Durchschnittspunkt e den Kreis apφb. Weil nun die beiden Seiten des gesuchten Dreiecks, welche x, y, heissen mögen, so beschaffen sein müssen, daß x + y = cd, so ist offenbar der Ort des Scheitels die verzeichnete Ellipse (475.) und weil der Winkel, der in dem gesuchten Dreieck der Seite ab gegenüber steht, = α sein soll, so ist der Ort des Scheitels zugleich der beschriebene

Kreis

Kreis (153. Anm.), folglich liegt der gesuchte Scheitel p oder φ zugleich in der Ellipse und dem Kreise, oder da, wo beide einander schneiden, daß es also für den gesuchten Punkt zweene verschiedene Stellen giebt, die aber in besondern Fällen, wie leicht zu begreifen ist, zusammenfallen können. Die trigonometrische Berechnung wäre folgende.

Es sei die gegebene Summe der beiden Seiten = m, und die von den unbekannten Seiten, welche durch a geht, heiße x, so giebt sich

$$\text{Cot } a = \frac{x}{(m-x).\sin\alpha} - \text{Cot } \alpha$$

und

$$\sin a = \frac{(m-x).\sin\alpha}{ab}$$

also

$$1.)\ \text{Cos } a = \text{Cot}.\ a.\ \sin a = \frac{x}{ab} + \left(\frac{x-m}{ab}\right).\text{Cos } \alpha$$

nun ist überdas

$$2.)\ \text{Cos } a = \sqrt{(1-\sin a^2)} = \sqrt{\left(\frac{ab^2-(m-x)^2\sin\alpha^2}{ab^2}\right)}$$

folglich, wenn man diese beiden Werthe gleich setzt,

$$\sqrt{\left(\frac{ab^2-(m-x)^2.\sin\alpha^2}{ab^2}\right)} = \frac{x}{ab} + \left(\frac{x-m}{ab}\right).\text{Cos } \alpha$$

und auf beiden Seiten quadrirt, und gehörig substituirt, giebt

$$2.(1+\text{Cos } \alpha)\,x^2 - 2m(1+\text{Cos } \alpha)\,x = ab^2 - m^2;$$

oder

oder $x^2 - mx = \frac{ab^2 - m^2}{2(1 - \mathrm{Cos}\,\alpha)}$

mithin

$$x = \tfrac{1}{2} m \pm \sqrt{\left(\frac{ab^2 - m^2}{2.(1 - \mathrm{Cos}\,\alpha)} + \tfrac{1}{4} m^2\right)}$$

also hat man einen zweifachen Werth für x, wie der Verzeichnung gemäß ist, da x sowohl $a p$, als $a \varphi$ sein kann.

§. 504.

Für jeden Durchschnitt, den der Kreis mit der Parabel macht, ist

$$y^4 + a^2 y^2 - 2a^2 cy + a^2 \left\{ \begin{array}{l} b^2 \\ + c^2 \\ - r^2 \end{array} \right. = 0;\ (503)$$
$$\quad - 2ab$$

Fällt nun M in A, so erhält man statt GM die Linie GA. Nun ist aber $GA^2 = GE^2 + AE^2 = c^2 + b^2$; folglich ist für diesen Durchschnitt in A, $r^2 = c^2 + b^2$; diesen Werth in die vorige Gleichung gesetzt, giebt

$$y^4 + \begin{array}{l} a^2 \\ - 2ab \end{array} y^2 - 2a^2 cy = 0;$$

folglich bleibt noch

$$y^3 + \begin{array}{l} a^2 \\ - 2ab \end{array} y - 2a^2 c = 0;$$

Und wenn man G in AE nimmt, so wird noch eine Wurzel der Gleichung (P.) = 0, und die übrigen beiden sind in dieser Gleichung enthalten

$y^2 +$

$$y^2 + a^2 - 2ab = 0$$

und sind also

$$\pm \sqrt{(a^2 - 2ab)}$$

Nun ist

$$a^2 - 2ab = 0$$

für $b = \frac{1}{2}a$, und für diesen Fall $r = b$, folglich werden für $c = 0$, $r = b = \frac{1}{2}a$, alle vier Wurzeln der Gleichung $P = 0$, oder alle vier Durchschnittspunkte fallen in diesem Fall im Scheitel A zusammen, und der Kreis heißt da der Krümmungskreis, und sein Halbmesser der Halbmesser der Krümmung, weil man keinen Kreisbogen beschreiben kann, der zwischen diesem und der Parabel hergienge, und dieser also unter allen Kreisen, die sich an der Parabel Scheitel beschreiben lassen, der Krümmung derselben um den Scheitel herum am nächsten kommt.

§. 505.

Jede Gleichung, die diese Gestalt hat

$$z^3 + pz + \varrho = 0$$

läßt sich wie eine Gleichung ansehen, die dadurch entstanden wäre, daß man die Durchschnitte einer Parabel mit einem Kreis, der sie auch im Scheitel schneiden sollte, gesucht hätte. Nun ist Q eine Gleichung, die in der That so entstanden ist. Soll also in R. die Wurzel z so wie in Q Ordinaten vorstellen, so muß man R mit Q vergleichen, um die Werthe der in Q befindlichen Coef-

Coefficienten aus denen in (R) gegebenen π, ϱ, zu bestimmen. Soll nämlich das y in Q mit dem z in R einerlei sein, so ist

$$1.)\ a^2 - 2ab = \pi;$$

$$2.)\ - 2a^2c = \varrho;$$

Diese beide Gleichungen enthalten drei unbekannte Größen a, b, c, wovon man also eine nach Willkühr annehmen kann; man nehme daher den Parameter a als gegeben an, so giebt sich aus (1.)

$$\frac{a^2 - \pi}{2a} = b;$$

und aus (2.)

$$\frac{-\varrho}{2a^2} = c;$$

man kann auch beide Ausdrücke wie die im Buche verändern. Wenn π, ϱ, in Linien gegeben sind, so müssen alle Glieder der Gleichung R nothwendig einerlei Abmessungen haben, weil sie sonsten nicht Größen von einerlei Art wären, und also zusammen nicht die o ausmachen könnten, wie doch erfordert wird. Daraus folgt nun, daß man $\pi = ap$ und $\varrho = a^2q$ setzen kann, und man erhält dadurch

$$b = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}p;$$

$$c = -\tfrac{1}{2}q;$$

§. 507.

§. 507. II.

Die Durchschnitte eines gegebenen Kreises mit einer gegebenen Ellipse zu finden, verfahre man so.

Die Axe der Ellipse sei cd = a, der Parameter = b; des Kreises Mittelpunkt sei e, sein Halbmesser ep = r, eE = c, cE = f, so ist fig. §. 499. das. Anm.

$$r^2 = pk^2 + ke^2$$
$$= (qp - qk)^2 + (cE - cq)^2$$
$$= (y - c)^2 + (f - x)^2$$
$$= y^2 - 2cy + c^2 + f^2 - 2fx + x^2;$$

aber

$$x = \frac{a \pm \sqrt{((a^2 - 4ay) : b)}}{2}$$

und

$$x^2 = \frac{a^2 \pm 2a\sqrt{((a^2 - 4ay) : b)} + (a^2 - 4ay) : b}{4}$$

Also

$$r^2 = y^2 - 2cy + c^2 + f^2 - af \mp f\sqrt{\left(\frac{a^2 - 4ay}{b}\right)} - \frac{a}{b}y + \frac{a^2}{4b} + \tfrac{1}{4}a^2 \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{\left(\frac{a^2 - 4ay}{b}\right)}$$

$$= y^2 - 2c.y + c^2 \pm (\tfrac{1}{2}a - f).\sqrt{\left(\frac{a^2 - 4ay}{b}\right)}$$
$$\quad - \frac{a}{b} \quad + f^2$$
$$\quad + \tfrac{1}{4}a^2$$
$$\quad + \frac{a^2}{4b}$$
$$\quad - af$$

Und

Und alles gehörig quadrirt, giebt

$$y^4 - \left(4c + \frac{2a}{b}\right)y^3 + \left(\left(2c + \frac{a}{b}\right)^2 + 2(c^2 + f^2\right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{a^2}{4b} - r^2 - af)\right) y^2 + \left(4c + \frac{2a}{b}\right).$$

$$\left(r^2 + af - c^2 - f^2 - \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{4b}\right) y + \left(r^2 + af -\right.$$

$$\left. c^2 - f^2 - \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{4b}\right)^2 = (\tfrac{1}{2}a - f).\frac{a^2 - 4ay}{b} =$$

$$\frac{a^3}{2b} - \frac{2a^2}{b}y - \frac{a^2f}{b} + \frac{4af}{b}y,$$

also

$$y^4 - \left(4c + \frac{2a}{b}\right) y^3 + \left(\left(2c + \frac{a}{b}\right)^2 + 2(c^2 +\right.$$

$$\left. f^2 + \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{a^2}{4b} - r^2 - af)\right). y^2 + \left(\frac{2a^2 - 4af}{b} +\right.$$

$$\left.\left(4c + \frac{2a}{b}\right).\left(r^2 + af - c^2 - f^2 - \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{4b}\right)\right).y +$$

$$\left(r^2 + af - c^2 - f^2 - \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{4b}\right)^2 + \frac{2a^2f - a^3}{2b}$$

$= 0$ (Z

Hiermit könnte man nun eben so, wie mit der Gleichung P. (503.) verfahren.

Die

Die Gleichung Z löst zugleich die Aufgabe auf: aus der gegebenen Grundlinie eines Dreiecks γ, dem gegenüberstehenden Winkel α, und der Summe der beiden andern Seiten m, die Höhe y zu finden, weil y die senkrechte Ordinaten aus den Durchschnittspunkten auf die Axe z. B. pq vorstellt, und alle Coefficienten gegeben sind. Es ist nämlich aus (499. das. Anm.)

1.) cd oder $a = m$

2.) $b = m - \frac{\gamma^2}{m}$

3.) $r = \frac{\gamma}{2. \sin \alpha}$

und weil $< aeb = 2\alpha$, also $aeE = \alpha$, so ist sin $eaE = \operatorname{Cos} \alpha$, folglich $1 : ae = \operatorname{Cos} \alpha : Ee$ und $Ee = ae. \operatorname{Cos} \alpha = \frac{\gamma. \operatorname{Cos} \alpha}{2 \sin \alpha}$, oder

4.) $c = \frac{1}{2} \gamma. \operatorname{Cot} \alpha$;

Weil nun eE auf ab senkrecht ist, so ist $aE = Eb$; nun ist aber auch $ac = bd$, folglich $cE = Ed$, und daher

5.) $f = \frac{1}{2} m$

Man kann aber vermittelst trigonometrischer Formeln diese Aufgabe leichter auflösen, daß also die Gleichung Z, wie sie überhaupt wenig Nutzen hat (III.), auch zu diesem Gebrauch völlig entbehrlich ist.

§. 508.

Die Voraussetzung, daß der Würfel von z doppelt so groß, als der von g sein soll, giebt

$$z^3 = 2g^3$$

also $$2g = \frac{z^3}{g^2} = \frac{z.(z^2 : g)}{g}$$

mithin $$g : z = \frac{z^2}{g} : 2g;$$

Hieraus ist klar, daß die beiden Aufgaben

1.) aus der gegebenen Seite eines Würfels die Seite des Würfels vom doppelten Inhalt zu finden.

2.) zwischen zwo gegebenen Größen, deren eine doppelt so groß als die andere ist, zwo mittlere Proportionalgrößen zu finden.

eigentlich nur verschiedene Ausdrücke eben derselben Frage sind.

Woraus die Gleichung rc. rc. Sollen sich nämlich ein Paar ähnliche Körper wie e zu n verhalten, so gelangt man allemal zu der Gleichung $z^3 = k^2 f$ (505. III.) auf folgende Art.

Es ist $$e : n = k : \frac{kn}{e}$$

oder wenn man $\frac{kn}{e} = f$ setzt,

$$e : n = k : f$$

setzt man also statt e, k; so wird aus n, f, und die

die Gleichung $z^3 = k^3 n : e$ verwandelt sich in $z^3 = k^3 f : k = k^2 f$, wo also $f = \frac{kn}{e}$ ist.

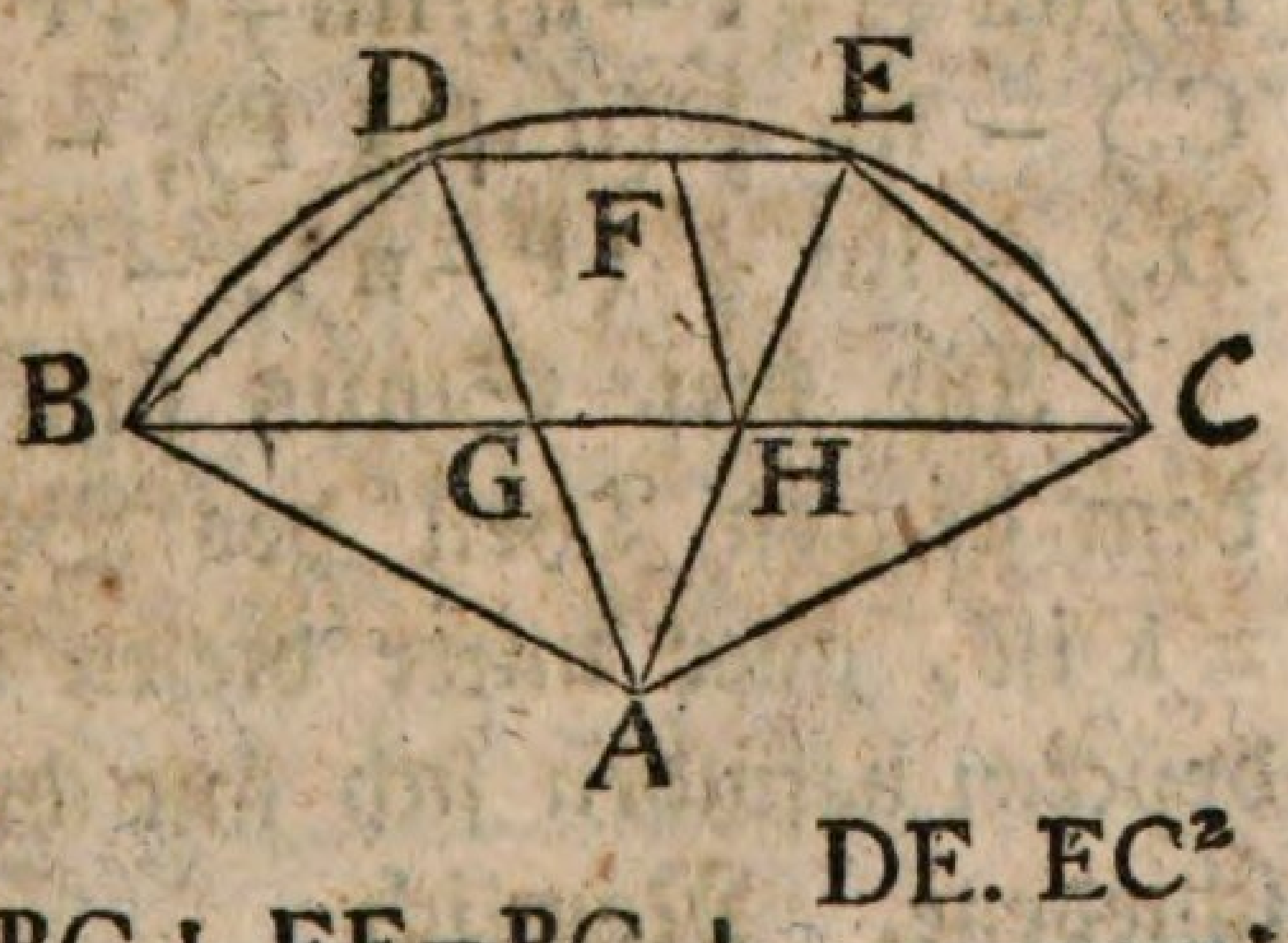
§. 509. *

Wenn ein Bogen in drei gleiche Stücke getheilt wird, so sind die zu diesen drei Stücken gehörige Sehnen zusammengenommen, der Sehne des ganzen Bogens zu derjenigen Linie addirt gleich, die sich zu einer der vorigen einzelnen Sehnen verhält, wie das Quadrat einer dieser Sehnen vom dritten Theil des Bogens zu dem Quadrat des Halbmessers.

Bew. Das Dreieck AEC ist ein gleichschenklichtes, weil AC = AE. (A ist des Kreises Mittelpunkt). Das Dreieck ECH ist dem Dreieck AEC ähnlich, weil AEC beiden Dreiecken gemein ist, und ECH = EAC, also ECA = EHC und AEC = EHC mithin HC = EC

$$AE : EC = EC : EH$$
$$AE : EH = AE^2 : EC^2$$

Nun ist aber FH der DA gleichlaufend, also $AE : FD = EH : EF$ und daher $ED : EF = AE^2 : EC^2$ oder $EF : DE = EC^2 : AE^2$ und daher $BD + DE + EC = BG + GH + FE + HC = BC + EF = BC + \frac{DE.\,EC^2}{AE^2}$;



§. 510.

Wenn u der kleinste Bogen ist, dessen Sinus k ist, so ist k zugleich der Sinus von folgenden Bogen

I. Der positive von $\left\{ \begin{array}{l} u;\ u + P;\ u + 2P;\ u + 3P\ \text{- - - -} \\ \frac{1}{2}P - u;\ \frac{3}{2}P - u;\ \frac{5}{2}P - u;\ \frac{7}{2}P - u;\ \text{- - -} \end{array} \right.$

II. Der negative von $\left\{ \begin{array}{l} u + \frac{1}{2}P;\ u + \frac{3}{2}P;\ u + \frac{5}{2}P;\ u + \frac{7}{2}P;\ \text{- - -} \\ P - u;\ 2P - u;\ 3P - u;\ 4P - u;\ \text{- - -} \end{array} \right.$

Soll man also aus dem gegebenen Sinus k des einfachen Bogens den Sinus a des dritten Theils des Bogens finden, so heißt dies eigentlich so viel:

Aus einem gegebenen Sinus k den Sinus von dem dritten Theil des Bogens finden, dessen Sinus = k ist; nun ist jedes Glied der genannten vier Reihen ein zu sin k gehöriger Bogen, folglich dienen, um den Sinus vom dritten Theil des Bogens, dessen Sinus = k ist, zu finden, folgende Ausdrücke:

A.) $\sin\frac{1}{3}u;\ \sin\frac{1}{3}(u + P);\ \sin\frac{1}{3}(u + 2P)$ - - - -

B.) $\sin\frac{1}{3}(\frac{1}{2}P - u);\ \sin\frac{1}{3}(\frac{3}{2}P - u);\ \sin\frac{1}{3}(\frac{5}{2}P - u)$ - - -

C.) $-\sin\frac{1}{3}(u + \frac{1}{2}P);\ -\sin\frac{1}{3}(u + \frac{3}{2}P);$ - - - -

D.) $-\sin\frac{1}{3}(P - u);\ -\sin\frac{1}{3}(2P - u)$ - - - -

Alle diese Sinus sind nämlich Sinus von dem dritten Theil des Bogens, dessen Sinus = k ist, aber unter diesen unendlich vielen Ausdrücken befinden sich nur drey von einander verschiedene. Nämlich

aus

aus A ist 1.) $a = \sin \frac{1}{3} u$

2.) $a = \sin \frac{1}{3} (u + P.)$

und aus C 3.) $a = - \sin \frac{1}{3} (u + \frac{1}{2} P.)$

So ist z. B. in A $\sin \frac{1}{3} (u + 2P)$ mit $- \sin \frac{1}{3} (u + \frac{1}{2} P)$ als dem ersten Glied in C einerlei, weil $\sin \frac{1}{3} (u + 2P) = \sin (\frac{1}{3} u + \frac{1}{6} P + \frac{1}{2} P) = - \sin (\frac{1}{3} u + \frac{1}{6} P) = - \sin \frac{1}{3} (u + \frac{1}{2} P)$, und so geben alle in A, B, C, D befindliche Ausdrücke nur die drei genannten verschiedenen Sinusse. Sucht man also den Sinus von dem dritten Theil desjenigen Bogens, dessen Sinus = k ist, so muß die Auflösung nothwendig auf drei Werthe von a führen, weil es drei besondere Sinusse giebt, von deren zugehörigen Bogen jeder ein Drittheil desjenigen Bogens ist, dessen Sinus = k ist. Daher führt sie auf eine cubische Gleichung

$$a^3 - \frac{3}{4} a + \frac{1}{4} k = 0$$

deren Wurzeln $\sin \frac{1}{3} u$, $\sin \frac{1}{3} (u + P)$ und $\sin \frac{1}{3} (u + \frac{1}{2} P)$ sein müssen.

§. 521.

Es sei der Ort von M ein Kreis, welcher allemal entsteht, man mag eine Kugel schneiden, wo man will, und C sei ein Punkt eines größten Kreises, so ist $CT = x$, $TM = y$, und $TM^2 = a.CT - CT^2$; nun sei $TM : TQ = \sec MCQ : \sin tot = 2 : 1$, so ist $TM = 2TQ$, also $4TQ^2 = a.CT - CT^2$, und $TQ^2 = \frac{a.\ CT - CT^2}{4}$; ist also

 der

der bei TQ befindliche Coefficient $2 = m$, so ist die allgemeine Gleichung für die Projection der Punkte M der Kugel, wenn man $TQ = z$ setzt

$$z^2 = \frac{ax - x^2}{m^2} \text{ N.})$$

diese mit der Gleichung 362 verglichen, giebt

dort	y^2	b	$b : a$
hier	z^2	$a : m^2$	$1 : m^2$

folglich ist die gesuchte Projection eine Ellipse, in der die große Axe $= a = r$, und der Parameter $= \frac{a}{m^2}$ oder $\frac{r}{m^2}$ ist.

§. 524.

Daß jeder Durchschnitt eines Cylinders eine Ellipse geben müsse, läßt sich auch aus andern Gründen begreifen. Man kann nämlich jeden Cylinder als einen abgekürzten Kegel betrachten, dessen Spitze von der Grundfläche unendlich weit absteht. Man mag nun dieses Stück des abgekürzten unendlich hohen Kegels, wo man will, durchschneiden, so erhält man eine Ellipse. Aus der Art, wie Hyperbel und Parabel aus den Kegeln geschnitten werden, erhellet, daß hier der Schnitt für die Hyperbel unmöglich wird, der Schnitt aber für die Parabel ein Rectangel geben muß. Man müßte nämlich im ersten Fall den Cylinder nach einer solchen Richtung schneiden, welche die verlängerte Axe des Cylinders über

über der Spitze desselben durchschnitte; aber dazu würde eine Verlängerung über das Unendliche erfordert, und ist also unmöglich. Im andern Fall müßte man den Cylinder mit seiner Axe gleichlaufend durchschneiden, und dieser Schnitt giebt ein Rectangel.

§. 545.

Im engern Verstand heißen runde Körper diejenige, deren Durchschnitte überall Kreise darstellen, und in dieser Bedeutung ist die Kugel allein ein runder Körper. In einer weitern Bedeutung aber, wie man sie hier nimmt, heißen überhaupt alle Körper, bei denen nur eine Reihe paralleler Schnitte lauter Kreise darstellet, rund. So giebt jeder Durchschnitt eines Kegels, der auf seiner Axe senkrecht ist, einen Kreis, daher heißen auch Kegel, Cylinder u. a. runde Körper. Es muß also jeder Schnitt, der von der Fläche eines runden Körpers bis auf seine Axe senkrecht geht, einen halben Kreis darstellen, der durch Verlängerung des Schnitts bis an den gegenüberstehenden Punkt der Fläche des runden Körpers ergänzt wird. Durchschneidet man daher einen runden Körper so, daß die Axe ganz in der schneidenden Ebene liegt, so erhält man zwo gleiche und ähnliche Flächen zu beiden Seiten der schneidenden Ebene.

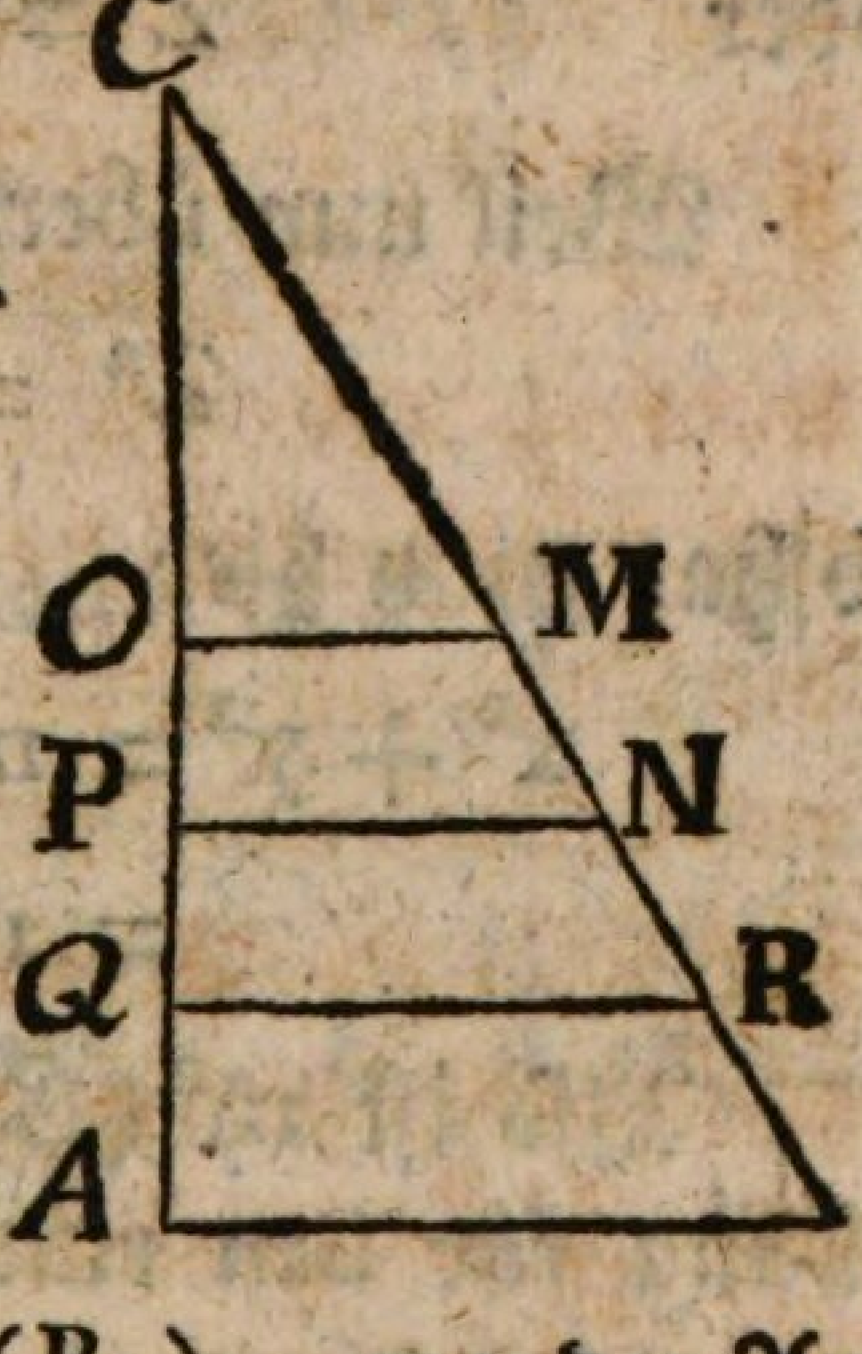
§. 546.

Man setze die Linie CA (fig. 29.), die die Axe eines runden Körpers vorstellen mag, so in A (fig. 26.), daß CO in A senkrecht steht, so nämlich, daß sich C über der Fläche des Papiers befindet, und OM auf AQ fällt. Da also OM den Halbmesser eines runden Körpers vorstellt, so muß M folglich auch Q in einem Kreis liegen, wovon nämlich A der Mittelpunkt ist, wie es fig. 29. O ist. Da nun AP = x, PQ = y, und AQ = OM ein rechtwinklichtes Dreieck ausmachen, dessen Hypothenuse AQ ist, so ist $x^2 + y^2 = AQ^2 = OM^2$. Stellt man sich hierbei vor, das Stück OA (fig. 29.) mit dem verlängerten OM befände sich (fig. 26.) unter der Fläche des Papiers, und man bewege die OA nun perpendikular in die Höhe, so kommt OM über AQ zu stehen, und man erhält AO = MQ (fig. 26.) wo MQ = z = AO ist. Mit der Abscisse AO steht die Ordinate OM = AQ in einer solchen Verhältniß, daß sich beide durch einander mit Zuziehung beständiger Größen bestimmen lassen, d. i. OM ist eine Funktion von AO = z. Läßt man also Z jede Funktion von AO = z vorstellen, so hat man $Z^2 = x^2 + y^2$, weil $OM^2 = Z^2 = x^2 + y^2$; und da dieses bei allen runden Körpern statt findet, so ist der gefundene Ausdruck eine allgemeine Gleichung für runde Körper.

Da

Da OM = Z die Ordinate vorstellt, die sich in der Linie MC für die Absciſſe AO = z ergiebt, so ersieht man zugleich hieraus, daß $x^2 + y^2$ oder Z^2, wie diese Buchstaben hier genommen werden, $= y^2$, wie dieses bei den Linien der zwoten Ordnung genommen wurde. Setzt man also in einer hierher gehörigen Gleichung y statt Z, so hat y die bisher gewöhnliche Bedeutung, statt dessen man aber um Zweideutigkeit zu vermeiden, Y schreiben kann, und für AO = z kann man x setzen, so hat auch dieses die sonst gewöhnliche Bedeutung, daß nämlich x die zu Y gehörige Absciſſe ist.

§. 547.



Es sei MC eine grade Linie, so ist, wenn die von C an auf CA genommenen Absciſſen u, und die zugehörigen Ordinaten Y heißen, fig. 29.
OM : CO = PN : CP = QR : CQ oder Y : u eine unveränderliche Verhältniß, heißt diese also m, so hat man Y = mu (R.) wo der Anfang der Absciſſen in C ist. Will man diese Gleichung in eine andere, da nämlich die Absciſſen von A aus gerechnet werden, verändern, so setze man AC = β, dadurch erhält man

 AO =

$$AO = \beta - CO$$
$$AP = \beta - CP$$
$$AQ = \beta - CQ$$
$$AB = \beta - CB$$

oder überhaupt, wenn die von A aus genommenen Abscissen x heißen,

$$x = \beta - u$$

also $$u = \beta - x$$

Diesen Werth in R gesetzt, giebt

$$Y = m(\beta - x)$$
$$= m\beta - mx$$

oder $$Z = m\beta - mz$$

Weil nun überhaupt für runde Körper

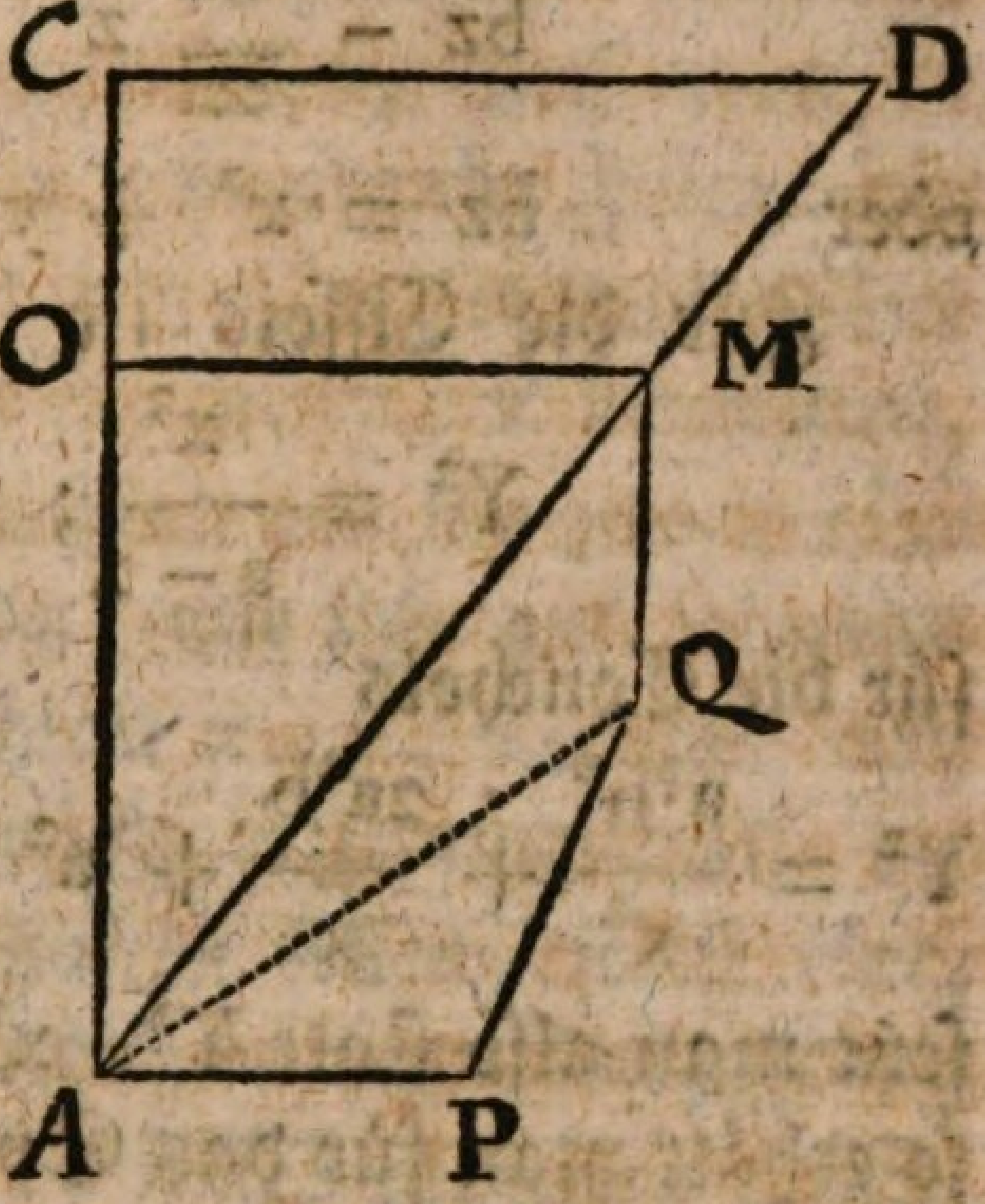
$$Z^2 = x^2 + y^2$$

so hat man hier

$$x^2 + y^2 = m^2\beta^2 + m^2z^2 - 2m^2\beta z$$
$$= m^2(\beta - z)^2$$

Also ist $m^2(\beta - z)^2 = x^2 + y^2$ die Gleichung für den runden Körper, welcher entsteht, wenn sich die grade Linie CM um den Kreis des Halbmessers OM bewegt, d. i. die Gleichung für den senkrechten Kegel, wenn sich M in einer graden Linie durch C befindet.

fig. 29. & 26.



Befindet sich aber M in einer graden Linie durch A, so ist Y : x = m einer beständigen Größe, also

$$mx = Y$$

oder $Z = mz$

und $m^2z^2 = x^2 + y^2$

eine Gleichung für den senkrechten Kegel ACD oder für das Sphäroid eines rechtwinklichten Dreiecks. So ist in beigefügter Figur, wo fig. 26. und 29. mit einander verbunden sind

$$AP^2 + PQ^2 = AQ^2 = OM^2 \; (525)$$
$$= m^2AO^2$$

§. 548.

Für die Ellipse, deren Scheitel in A ist, ist

$$Y^2 = bx - \frac{bx^2}{a};$$

setzt man also statt Y^2, Z^2; statt x, z; so erhält man für ein elliptisches Sphäroid

$$bz - \frac{b}{a}z^2 = x^2 + y^2$$

Eine Ellipse, deren Axe unendlich ist, wird zu einer Parabel, folglich ist für ein parabolisches Sphäroid

bz –

$$bz - \frac{b}{\infty} z^2 = x^2 + y^2$$

oder $$bz = x^2 + y^2;$$

Für die Cissois ist 469.

$$Y^2 = \frac{x^3}{a-x};$$

für die Conchois

$$Y^2 = \frac{a^2b^2}{x^2} + \frac{2a^2b}{x} + a^2 - b - 2bx - x^2;$$

setzt man also statt Y^2, $x^2 + y^2$, und statt x, z, so erhält man für das Sphäroid einer Cissoide

$$x^2 + y^2 = \frac{z^3}{a-z}$$

und für das Sphäroid der Muschellinie oder Conchoide

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2b^2}{z^2} + \frac{2a^2b}{x} + a^2 - b - 2bz - z^2;$$

§. 549.

Die Aufgabe verlangt eine Gleichung für den Schnitt der Fläche mit der Ebene, d. i. eine Gleichung zwischen den genannten Coordinaten ES = t, und SM = v, die auf dem Schnitt der Grundfläche Ee und dem Flächenschnitt genommen werden. Nun ist schon im vorhergehenden gezeigt worden, wie Flächen durch Gleichungen ausgedrückt werden, und daß solche Gleichungen

drei Coordinaten x, y, z enthalten. Um also die gegebene Aufgabe aufzulösen, muß man in der Gleichung für eine zu schneidende Fläche die Coordinaten x, y, z, durch t, v, auszudrücken suchen, mithin Werthe für x, y, z berechnen, die außer beständigen Größen nur die zwo veränderlichen t, v, enthalten, wie sich auf folgende Art ergiebt. Wenn man x, y, z, oder AP, PQ, QM, durch Ausdrücke bestimmen will, die t, v oder ES. SM enthalten sollen, so ist klar, daß man dergleichen Ausdrücke aus Betrachtung der Dreiecke ETS, SQV, MQS herleiten müsse.

Es ist nämlich

1.) AP = EX = ET + TX = ET + SV, aber

2.) ET = ES. sin EST = t. Cos θ, und

3.) SV = QS. sin VQS = QS. sin (90° – QoX) = QS. sin (90° – EOS) = QS. sin θ

4.) QS = v. Cos φ, also

5.) SV = v. Cos φ. sin θ und daher

6.) AP = ET + TV = t. Cos θ + v. Cos φ sin θ = x,

Eben so ergiebt sich PQ durch t und v, nämlich

1.) PQ = VQ – (VX + PX), nun ist

2.) VX = TS = t. sin θ

3.) PX = AE = f und

4.) VQ = QS. Cos θ = v. Cos φ. Cos θ, folglich

5.) PQ = v. Cos φ. Cos θ – t. sin θ – f = y;

Man

Man hat demnach folgende Werthe für x, y, z,

$x = t. \text{Cos}\,\theta + v. \text{Cos}\,\varphi. \sin\theta;$

$y = v. \text{Cos}\,\varphi. \text{Cos}\,\theta - t. \sin\theta - f;$

$z = v. \sin\varphi$

Diese drei Werthe statt x, y, z, in die Gleichung für die Fläche (516.) gesetzt, giebt eine Gleichung zwischen t und v. d. i. die gesuchte für den Schnitt.

§. 550.

Man vergleiche hiermit die Anm. zu 547. wo schon die Gleichung für den senkrechten Kegel gefunden worden.

Ist AP der Ee gleichlaufend, so muß EX in Ee fallen, weil auch EX mit AP parallel ist, und durch einen Punkt E nur eine parallele Linie mit einer andern gezogen werden kann. Indem nun EX in Ee fällt, wird $\theta = 0$; für den Fall also, da AP der Ee gleichlaufend ist, ist $\theta = 0$, folglich (549.) $z = v. \sin\varphi$, $x = t. \text{Cos}.\, 0° + v. \text{Cos}\,\varphi. \sin 0°$; es ist für sin. tot. = 1, $\text{Cos}\, 0° = 1$, und $\sin 0° = 0$, also $x = t. 1 + v. \text{Cos}\,\varphi. 0 = t$; $y = y. \text{Cos}\,\varphi. \text{Cos}\, 0° - t. 0 - f = v. \text{Cos}\,\varphi - f$; diese Werthe statt x, y, z, in die Gleichung $x^2 + y^2 + 2m^2bz - m^2z^2 - r^2 = 0$ gesetzt, giebt

$$t^2 + (\text{Cos}\,\varphi^2 - m^2 \sin\varphi^2).\, v^2 + (2m^2b. \sin\varphi - 2\,\text{Cos}\,\varphi. f)\, v + f^2 - r^2 = 0;$$

Diese

Diese mit der Gleichung (419.) verglichen, und statt x, y; v, t gesetzt, giebt

$$f^2 - r^2 = \alpha;$$
$$2m^2b. \sin\varphi - 2\operatorname{Cos}\varphi.\ f = \beta;$$
$$\gamma = 0;$$
$$\operatorname{Cos}\varphi^2 - m^2 \sin\varphi^2 = \delta$$
$$\varepsilon = 0;$$
$$\zeta = 1;$$

wo also $\varepsilon^2 - 4\zeta\delta = -4\zeta\delta$; da man nun eine Hyperbel, Ellipse, oder Parabel erhält, nachdem $\varepsilon^2 - 4\zeta\delta$ bejaht, verneint oder $= 0$ ist, so muß hier für $-4\zeta\delta$, nachdem es bejaht, verneint oder $= 0$ ist, eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel herauskommen. Nun ist aber $-4\zeta\delta$ bejaht, verneint, oder $= 0$, nachdem es mit $-\zeta\delta$ diese Beschaffenheit hat, da also $-\zeta\delta = -\delta = m^2. \sin\varphi^2 - \operatorname{Cos}\varphi^2$, so muß es mit $m^2 \sin\varphi^2 - \operatorname{Cos}\varphi^2$ die erwähnte Beschaffenheit haben, nachdem einer von den dreien Kegelschnitten entstehen soll. Wäre der Coefficient von $\sin\varphi^2$ oder $\sin\varphi^2$ selbst verneint, so wäre $-\zeta\delta$ allemal verneint, $\operatorname{Cos}\varphi^2$ möchte größer oder kleiner, als $m^2. \sin\varphi^2$ sein; da aber weder m^2 noch $\operatorname{Cos}\varphi^2$ verneint sein können, weil sie Quadrate sind, so ist $-\zeta\delta$ offenbar bejaht, verneint, oder $= 0$, nachdem $\operatorname{Cos}\varphi^2$ kleiner, größer oder $= m^2. \sin\varphi^2$ ist, daß also der Schnitt eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel giebt, nachdem der erste, der zweite oder der dritte von den erwähnten Fällen statt findet.

§. 552.

§. 552.

$Cos\,\phi^2 - m^2 . \sin\phi^2$ durch $m^2 . Cos\,\phi^2$ dividirt, giebt eine Größe, die noch unter eben den Umständen bejaht, verneint oder $= 0$ ist, wie der Dividendus. Man erhält aber

$$\frac{Cos\,\phi^2}{m^2 . Cos\,\phi^2} - \frac{m^2 . \sin\phi^2}{m^2 . Cos\,\phi^2} = \frac{1}{m^2} - \left(\frac{\sin\phi}{Cos\,\phi}\right)^2$$

Da nun (550) $\frac{m}{1} = \frac{r}{b}$, so hat man für $r = 1$, $\frac{1}{m} = \frac{b}{r} = b$; aber tang CBA $= b$ für $AB = r = 1$, folglich $\frac{1}{m} = tg\,CBA$, und aus der Trig. ist $\frac{\sin\phi}{Cos\,\phi} = tg\,\phi$, also

$$\frac{1}{m^2} = tg\,\beta^2 \text{ für } CBA = \beta,$$

und $$\left(\frac{\sin\phi}{Cos\,\phi}\right)^2 = tg\,\phi^2,$$

mithin $$\frac{1}{m^2} - \left(\frac{\sin\phi}{Cos\,\phi}\right)^2 = tg\,\beta^2 - tg\,\phi^2;$$

Nachdem also $tg\,\beta^2 - tg\,\phi^2$ verneint, bejaht oder $= 0$ ist, d. i. nachdem $tg\,\beta^2 < tg\,\phi^2$ oder $tg\,\beta^2 > tg\,\phi^2$ oder $tg\,\beta^2 = tg\,\phi^2$ ist, erhält man eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel.

§. 560.

Für $t = o$ wird (550.) $(\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - m^2 \sin\varphi^2)\, v^2 + (2 \sin\varphi.\, m.\, r - 2.\, \mathrm{Cos}\,\varphi.\, f)\, v + f^2 - r^2 = o$

also

$$v^2 + \frac{2.\sin\varphi.\, m.\, r - 2\,\mathrm{Cos}\,\varphi.\, f}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - m^2.\sin\varphi^2}\, v = (r^2 - f^2) : (\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - m^2.\sin\varphi^2)$$

Demnach

$$v + \frac{\sin\varphi.\, m.\, r - \mathrm{Cos}\,\varphi.\, f}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - m^2.\sin\varphi^2} = \pm \surd\left(\frac{r^2 - f^2}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - m^2 \sin\varphi^2} + \frac{(\sin\varphi.\, m.\, r - \mathrm{Cos}\,\varphi.\, f)^2}{(\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - m^2.\sin\varphi^2)^2}\right)$$

$$= \pm \surd((\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - m^2.\sin\varphi^2)(r^2 - f^2) + (\sin\varphi.\, mr - \mathrm{Cos}\,\varphi.\, f)^2) : (\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - m^2.\sin\varphi^2)$$

$$= (\pm \surd(\mathrm{Cos}\,\varphi^2.\, r^2 + m^2.\sin\varphi^2 f^2 - \mathrm{Cos}\,\varphi^2.\, f^2 - m^2 \sin\varphi^2 r^2 + \mathrm{Cos}\,\varphi^2 f^2 - 2 \sin\varphi.\, mr.\, \mathrm{Cos}\,\varphi.\, f + \sin\varphi^2.\, m^2 r^2)) : (\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - m^2.\sin\varphi^2) =$$

$$\pm \frac{\surd(\mathrm{Cos}\,\varphi^2 r^2 + \sin\varphi^2 m^2 f^2 - 2 \sin\varphi.\, mr.\, \mathrm{Cos}\,\varphi.\, f)}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - m^2 \sin\varphi^2}$$

Nun ist die Größe unter dem Wurzelzeichen $= (\mathrm{Cos}\,\varphi.\, r - \sin\varphi.\, mf)^2$, also

$$v + \frac{\sin\varphi.\, mr - \mathrm{Cos}\,\varphi.\, f}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - m^2 \sin\varphi^2} = \pm\left(\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi.\, r - \sin\varphi.\, mf}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - m^2 \sin\varphi^2}\right)$$

wo v zweene Werthe bekommt, nämlich

I.) Für das obere Zeichen

$$v = \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi.\, r - \sin\varphi.\, mf + \mathrm{Cos}\,\varphi.\, f - \sin\varphi.\, mr}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - m^2.\sin\varphi^2}$$

$$= \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi\,(r+f) - \sin\varphi.\, m\,(f+r)}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - m^2.\,\sin\varphi^2}$$

$$= \frac{(f+r)\,.\,(\mathrm{Cos}\,\varphi - m.\,\sin\varphi)}{(\mathrm{Cos}\,\varphi + m.\,\sin\varphi)\,.\,(\mathrm{Cos}\,\varphi - m.\,\sin\varphi)}$$

$$= \frac{f+r}{\mathrm{Cos}\,\varphi + m.\,\sin\varphi};$$

II.) Für das untere Zeichen

$$v = \frac{\sin\varphi.\,mf - \mathrm{Cos}\,\varphi.\,r + \mathrm{Cos}\,\varphi.\,f - \sin\varphi.\,mr}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - m^2.\,\sin\varphi^2}$$

$$= \frac{(f-r)\,.\,(m.\,\sin\varphi) + (f-r).\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{(\mathrm{Cos}\,\varphi + m.\,\sin\varphi)\,.\,(\mathrm{Cos}\,\varphi - m.\,\sin\varphi)}$$

$$= \frac{(f-r)\,.\,(m.\,\sin\varphi + \mathrm{Cos}\,\varphi)}{(\mathrm{Cos}\,\varphi - m.\,\sin\varphi)\,.\,(m.\,\sin\varphi + \mathrm{Cos}\,\varphi)}$$

$$= \frac{f-r}{\mathrm{Cos}\,\varphi - m.\,\sin\varphi};$$

§. 561.

Da $\frac{r}{b} = m$ (550.), und $b = \mathrm{tang}\ ABC$ für $r = 1$, (552.) so ist $m = \frac{1}{\mathrm{tg}\ ABC} = \frac{1}{\mathrm{tg}\ \beta} = \mathrm{Cot}\,\beta$; man darf also nur statt m, Cot β setzen, so erhält man die im Buche befindliche Gleichungen.

§. 566.

Die Axe heiße a, so ist $a = (f - r) : (\mathrm{Cos}\,\varphi. \mathrm{Cot}\,\beta. (\mathrm{tang}\,\beta - \mathrm{tang}\,\varphi)) - (f + r) : (\mathrm{Cos}\,\varphi. \mathrm{Cot}\,\beta. (\mathrm{tang}\,\beta + \mathrm{tang}\,\varphi)) = [(f - r). \mathrm{Cos}\,\varphi. \mathrm{Cot}\,\beta\,(\mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\varphi) + (f + r). \mathrm{Cos}\,\varphi. \mathrm{Cot}\,\beta. (\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\beta)] : [\mathrm{Cos}\,\varphi^2. \mathrm{Cot}\,\beta^2. (\mathrm{tg}\,\beta^2 - \mathrm{tg}\,\varphi^2)] = [(f - r). (\mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\varphi) + (f + r). (\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\beta)] : [\mathrm{Cos}\,\varphi. \mathrm{Cot}\,\beta. (\mathrm{tg}\,\beta^2 - \mathrm{tg}\,\varphi^2)] = [f. \mathrm{tg}\,\beta + f. \mathrm{tg}\,\varphi - r. \mathrm{tg}\,\beta - r. \mathrm{tg}\,\varphi + f. \mathrm{tg}\,\varphi - f. \mathrm{tg}\,\beta + r. \mathrm{tg}\,\varphi - r. \mathrm{tg}\,\beta] : [\mathrm{Cos}\,\varphi. \mathrm{Cot}\,\beta. (\mathrm{tg}\,\beta^2 - \mathrm{tg}\,\varphi^2)]$

$$= \frac{2(f. \mathrm{tang}\,\varphi - r. \mathrm{tang}\,\beta)}{\mathrm{Cos}\,\varphi. \mathrm{Cot}\,\beta. (\mathrm{tang}\,\beta^2 - \mathrm{tang}\,\varphi^2)}$$

§. 576.

Sie kann also ꝛc. ꝛc. Daraus folgt aber nicht, daß jede transscendentische Linie sich von einer graden in der That in unzählig vielen Punkten müsse schneiden lassen; es kann nur eine bestimmte Menge von Durchschnittspunkten möglich, und die übrigen alle unmöglich sein. Ein Beispiel ist die krumme Linie, für welche $y = c^x$, welche die logarithmische heißt. (Anal. des Unendl. 213. 234.)

§. 596.

Nähme man $rx = mpy$, so wäre für $x = p$,

$$r = my \text{ und}$$

$$y = r : m$$

d. i. es wäre eine Spirallinie, welche bei Vollendung ꝛc. und die Spirallinie geht da durch den Kreis, wo $x = mp$ ist; es wird nämlich in dem Fall $y = r$, und die Gleichung $rx = mpy$ verwandelt sich in $x = mp$.

§. 610.

Die Verhältniß jeder Fläche einer halben Radlinie EAF zu dem halben beschreibenden Kreis FLE läßt sich in völliger Schärfe angeben; sie ist nämlich, wie in der Anal. des Unendl. gewiesen wird, genau wie 3 : 1.

§. 625.

Um das Quadrat von so vielen Gliedern, als man will, zu berechnen, kann man nach und nach einzelne Glieder quadriren, und die so quadrirten Glieder allemal aufs neue als den ersten Theil der Wurzel und das zunächst folgende Glied als den zweeten ansehen. Auf diese Art ergiebt sich

$$1 + x = (1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 - - - -)^2$$

wo man zuerst $(1 + Ax)^2 = 1 + 2Ax + A^2x^2$ sucht; daraus giebt sich ferner

$$(1 + Ax + Bx^2)^2 = (1 + Ax)^2 + B^2x^4 + 2Bx^2 . (1 + Ax)$$

$$= 1 + 2Ax + A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4; \quad + 2B$$

und

und hieraus findet man

$$(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3)^2 = (1 + Ax + Bx^2)^2 + C^2x^6 + 2Cx^3(1 + Ax + Bx^2)$$

$$= 1 + 2Ax + A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + 2BCx^5 + C^2x^6$$
$$+ 2B \quad + 2C \quad + 2AC$$

So läßt sich die Reihe, so weit man will, fortsetzen, und also $\sqrt{(1 + x)}$ so genau, als es verlangt wird, berechnen. Allgemeine Regeln, wie sich die folgenden Glieder aus den vorhergehenden berechnen lassen, findet man in der Anal. des Unendl. S. 41. Die wirkliche Berechnung giebt nun

$$\sqrt{(1+x)} = 1 + 0{,}5x - 0{,}0125.x^2 + 0{,}0625.x^3 \text{ - - - Q.)}$$

Da sowohl für + x als − x, alle grade Potenzen ebendieselbigen sind, so ist klar, daß für $\sqrt{(1-x)}$ das erste, dritte, fünfte und überhaupt alle ungrade Glieder ungeändert bleiben; die graden aber werden verneint. Also ist

$$\sqrt{(1-x)} = 1 - 0{,}5x - 0{,}0125.x^2 - 0{,}0625.x^3 \text{ - - - R.)}$$

so daß alle auf das erste folgende Glieder verneint werden. Die Reihe Q läßt sich gebrauchen, aus jeder gegebenen Zahl die Wurzel zu ziehen. Ist nämlich a irgend eine gegebene Zahl, und wollte man $\sqrt{a}$ vermittelst der Reihe Q finden, so sei das in der Reihe der Zahlen vor a zunächst vorhergehende Quadrat = b^2, dieß giebt

$$a = b^2 \left(1 + \frac{a - b^2}{b^2}\right) \text{ also}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{b^2} \cdot \left(1 + \frac{a - b^2}{b^2}\right)$$

$$= b \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{a - b^2}{b^2}\right)}$$

c^2 sei das zunächst auf b^2 folgende Quadrat, daß also a zwischen b^2 und c^2 liegt, so ist $(c^2 - b^2) = 2b + 1$; (39) also höchstens $a - b^2 = 2b$, weil a und c^2 wenigstens um 1. verschieden sind; mithin ist niemals $\frac{a - b^2}{b^2} > \frac{2b}{b^2}$ oder niemals

$$\frac{a - b^2}{b^2} > \frac{2}{b}$$

Weil nun für a = 3 niemals $b^2 < 4$, also niemals $b < 2$, so ist offenbar niemals

$\frac{2}{b} > 1$ und daher niemals

$$\frac{a - b^2}{b^2} > 1$$

aber auch für x = 1 convergirt noch die Reihe Q, folglich ist die Formel

$$\sqrt{a} = b \sqrt{\left(1 + \frac{a - b^2}{b^2}\right)} \text{ S.)}$$

allemal brauchbar. Nur in dem Fall, wo $a < 4$ hat sie keinen Gebrauch, weil da b = 1 wäre; für

für diesen Fall hat man allemal

$$r_a = 2r\left(1 - \frac{4-a}{4}\right) \quad T.)$$

wobei man die Reihe R gebrauchen kann. Vermittelst dieser beiden Formeln S, T, werden die Reihen Q, R, auf alle Fälle anwendbar, obgleich dieses Verfahren oft auf sehr mühsame Rechnungen führt.

Die Lehre von dem Newtonischen Parallelogram werde ich nun, wie schon in der Vorrede erinnert worden, übergehen, und statt ihrer einer Lehre erwähnen, die so wichtig ist, und doch gewöhnlich denen, die sich nicht mit der Analysis des Unendlichen beschäftigen, unbekannt bleibt.

Von der Methode des Größten und Kleinsten; von den Tangenten der krummen Linien, den Wendungs- und Rückkehrpunkten.

1.

Es sei AGB irgend eine krumme Linie, und man nehme eine willkührliche Ordinate DM; man ziehe ferner MF der Abscissenaxe AB gleichlaufend, so werden die beyden Ordinaten DM, EF, die zu zwoen verschiedenen fig. 1. 2.

Abscissen AD, AE gehören, gleich groß sein. Nähern sich aber beide Ordinaten einander, so daß beide zugleich um gleichviel fortrücken, so wird der Unterschied der zugehörigen Abscissen AD, AE, immer kleiner, bis endlich beide Ordinaten DM, EF in der größten CG oder die beiden LM, NF, in der kleinsten IG zusammenfallen, und dadurch die Abscissen AE, AD, oder AL, HN, auf der Axe HK einander gleich werden. Ist daher eine Ordinate die größte oder kleinste, so muß die Gleichung für die krumme Linie nach dem Buchstaben, welcher die Abscisse bedeutet, geordnet zwo gleiche Wurzeln haben. Diese zu bestimmen, mache man eine Gleichung von zwo gleichen Wurzeln, z. B.

$$x^2 - 2ex + e^2 = 0;$$

welche ein Produkt aus $x - e$ in $x - e$ ist, und es sei die Gleichung für eine krumme Linie, in der man die größte oder kleinste Ordinate sucht, z. B. die für die Ellipse

$$x^2 - 2ax + \frac{2ay^2}{p} = 0$$

gegeben. Man vergleiche diese Gleichung mit der obigen, Glied vor Glied, auf folgende Art

$$x^2 - 2ax + \frac{2ay^2}{p} = 0;$$

$$x^2 - 2ex + e^2 = 0;$$

Aus

Aus Vergleichung der beiden mittlern Glieder findet man $a = e$; aber e ist die Wurzel der Gleichung $x^2 - 2ex + e^2 = 0$, und daher $e = x$, also wird $a = x$, und weil nun die x bestimmt ist, so ist es überflüßig, die letzten Glieder noch mit einander zu vergleichen.

Nimmt man also $x = a$, so ist die zugehörige Ordinate in der Ellipse die größte. Wäre aber die Gleichung für die krumme Linie vom dritten, vierten oder höhern Grad, so müßte man, um die gehörige Vergleichung anstellen zu können, die obige Gleichung von zwo gleichen Wurzeln auf den Grad erheben, von welchem die gegebene wäre, indem man sie mit so vielen Wurzeln multiplicirte, als hierzu erfordert würden. Es sei z. B. für eine Linie der dritten Ordnung, in der man die größte Ordinate sucht, diese Gleichung gegeben

$$x^3 * - axy + y^3 = 0$$

so multiplicire man die Gleichung $x^2 - 2ex + e^2 = 0$, um sie auch auf den dritten Grad zu erheben, mit $x - f = 0$, und vergleiche das Produkt mit der vorgegebenen Gleichung so:

$$x^3 * - axy + y^3 = 0;$$

$$x^3 - 2ex^2 + e^2x - e^2f = 0;$$

$$- f \quad + 2ef$$

Die Vergleichung der zweiten Glieder giebt

$$- 2e - f = 0$$

und daher $f = - 2e$

Aus Vergleichung der dritten erhält man

$$2ef + e^2 = -ay$$

und, wenn man den Werth von f setzt,

$$-3e^2 = -ay$$

aber $e = x$, also

$$y = \frac{3x^2}{a}$$

Diesen Werth statt y in der Gleichung für die krumme Linie substituirt, giebt die Abscisse

$$x = \frac{\sqrt[3]{(2a^3)}}{3}$$

der die größte Ordinate $y = \frac{3x^2}{a} = \frac{a}{3} . 2^{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{(4a^3)}}{3}$ zugehört.

fig. 1.

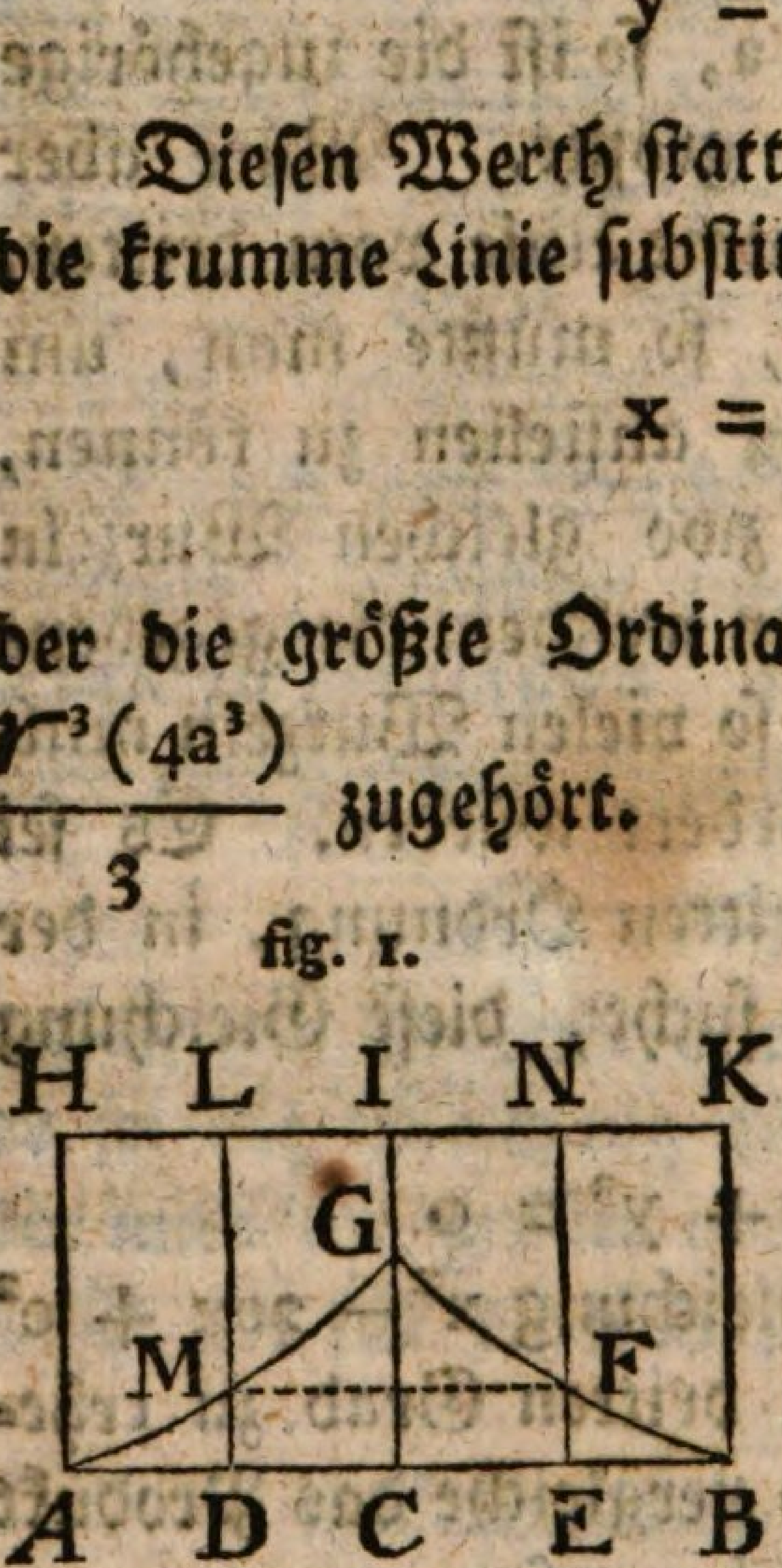
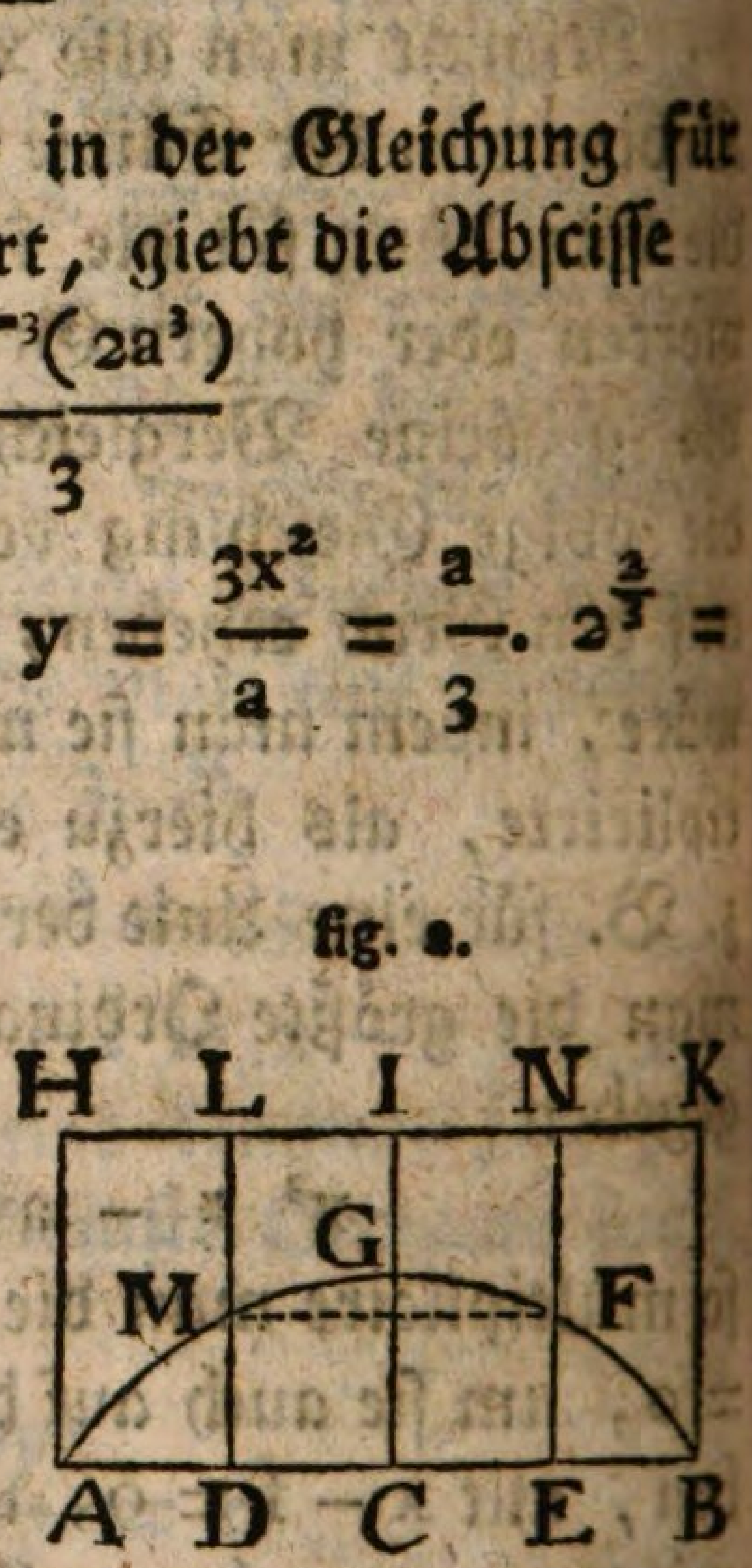


fig. 2.



2. Ohne aber die gegebene Gleichung mit einer andern, welche zwo gleiche Wurzeln hat, zu vergleichen, um den Bedingungen der Aufgabe ein Gnügen zu thun, wird es schon hinreichend sein, wenn man der gegebenen Gleichung Glieder durch irgend eine arithmetische Reihe multiplicirt,

plicirt, weil, wenn die Gleichung zwo gleiche Wurzeln hat, wie für den Fall des Größten und Kleinsten erfodert wird, eine von diesen Wurzeln nothwendig auch in dem Produkt der durch diese arithmetische Reihe multiplicirten Gleichung sich befinden muß, und daher diese Multiplication die Bedingung in sich faßt, daß dadurch die Abscisse einen solchen Werth bekommt, dem die gesuchte größte oder kleinste Ordinate zugehört. Dieses zu zeigen, nehme man eine allgemeine Gleichung von zwo gleichen Wurzeln $x^2 - 2hx + h^2 = o$, und multiplicire sie durch die arithmetische Reihe a, a + b, a + 2b, so erhält man das Produkt

$$\begin{aligned} ax^2 - 2ahx + ah^2 &+ 2h^3 = o, \\ &- 2h^2 \end{aligned}$$

Substituirt man nun hier h statt x, so heben sich alle Glieder einander auf, oder wenn man durch x − h dividirt, so geht die Division auf, folglich ist x − h eben so wohl eine Wurzel von diesem Produkt, wie von der Gleichung $x^2 - 2hx + h^2 = o$; eben dieses findet statt, wenn die arithmetische Reihe abnimmt, wie a, a − b, a − 2b u. s. Weil nun sowohl die Gleichung von zwo gleichen Wurzeln, als die dabei gebrauchte arithmetische Reihe a, a + b, a + 2b allgemein ist, so wird es auch allgemein wahr sein, daß eine Gleichung von zwo gleichen Wurzeln durch irgend eine arithmetische Reihe multiplicirt ein Produkt

giebt,

giebt, das noch durch eine von eben den Wurzeln theilbar ist. Hat die Gleichung drei gleiche Wurzeln, und man multiplicirt sie auf die vorerwähnte Art in eine arithmetische Reihe, so wird aus eben dem Grund das Produkt zwo von diesen gleichen Wurzeln enthalten, und dieß Produkt eben so in eine arithmetische Reihe multiplicirt giebt ein neues Produkt, das eine von ihnen enthält. Und eben das läßt sich von allen höhern Gleichungen sagen.

Man nehme wiederum die Gleichung für die Ellipse $x^2 - 2ax + \frac{2ay^2}{p} = 0$, und multiplicire sie durch die Reihe 2, 1, 0

$$x^2 - 2ax + \frac{2ay^2}{p} = 0;$$

$$2, \quad 1, \quad 0$$

so erhält man $2x^2 - 2ax = 0$, also $x = a$, wie schon oben gefunden worden. Multiplicirt man eben diese Gleichung mit einer andern arithmetischen Reihe 3, 2, 1,

$$x^2 - 2ax + \frac{2ay^2}{p} = 0$$

$$3, \quad 2, \quad 1.$$

so ist das Produkt $3x^2 - 4ax + \frac{2ay^2}{p} = 0$; und wenn man hier den Werth von y^2, der sich aus der Gleichung für die krumme Linie ergiebt, nämlich

lich $(2ax - x^2)\frac{p}{2a}$ substituirt, so findet man eben so $x = a$. Nimmt man die zwote Gleichung $x^3 * - axy + y^3 = 0$, und multiplicirt sie mit der Reihe 3, 2, 1, 0

$$\begin{array}{cccc} x^3 & * & -axy & +y^3 \\ 3, & 2, & 1, & 0, \end{array}$$

so erhält man zum Produkt $3x^3 - axy = 0$, also $3x^2 = ay$, wie oben.

3. Auf eine ähnliche Art findet man die Berührungs- und Normallinien an jeden gegebenen Punkt der krummen Linien (*). Diese Aufgabe läßt sich darauf bringen, daß man einen Kreis suche, der die krumme Linie an dem gegebenen Punkt berühre, weil sowohl die Tangente des Kreises an dem Punkt, als die Normallinie nämlich des Kreises Halbmesser, in diesem Fall auch der gegebenen krummen Linie an eben dem Punkt gehören. ACM sei eine krumme Linie, für die man an dem Punkt L eine Tangente verlangt, und GMH sei ein Kreis, der sie in den beiden Punkten C, M, schneide; ferner seien aus C, M, Ordinaten CE, MP, herabgelassen und durch eben diese Punkte die grade fig. 3.

Linie

(*) Normallinien heißen Linien, welche von einem gegebenen Punkt der krummen Linie so an die Axe gezogen sind, daß sie mit einer an eben den Punkt gezogenen Tangente einen rechten Winkel machen.

Linie MCT gezogen, so wird diese die krumme Linie in den Punkten C, M, schneiden. Je mehr sich aber beide Punkte einander näh rn, desto geringer wird die Differenz der beiden Ordinaten CE, MP, und der Abscissen AE, AP, so, daß, wenn beide Punkte zusammenfallen, z. B. in L, diese Coordinaten einerlei Werthe erhalten, und der Kreis alsdann die krumme Linie in L berühret (den Fall ausgenommen, wenn der Kreis ein Krümmungskreis ist, weil er in dem Fall die krumme Linie schneidet und sie in eben dem Punkt berühret, wie man in der Anal. des Unendlichen ersehen kann,) und die grade Linie MT wird alsdann zu einer Tangente der krummen Linie und des Kreises an dem Punkt L, gleichwie FL zu einer Normallinie.

fig. 4. Es sei also in der krummen Linie ALM $AQ = x$, $QL = y$; an L sei $LN = s$ eine Normale, und $AN = u$, so wird $QN = u - x$, und das rechtwinklichte Dreieck QLN giebt die allgemeine Formel $s^2 = u^2 - 2ux + x^2 + y^2$; hieraus suche man den Werth von y oder x, und substituire ihn in der Gleichung für die gegebene krumme Linie, so ergiebt sich dadurch der Werth für s oder u, weil man den Punkt L und daher auch x oder y als gegeben ansieht.

Es sei z. B. ALM eine Parabel, für die $ax = y^2$, so erhält man, wenn man an die Stelle von y^2 ihren Werth aus der vorhin gefundenen allge-

allgemeinen Formel setzt, $ax = s^2 - u^2 + 2ux - x^2$, oder wenn man die Gleichung nach x ordnet,

$$\begin{array}{l} x^2 - 2ux + u^2 = 0; \\ \quad\; + a \;\; - s^2 \end{array}$$

Diese muß also zwo gleiche Wurzeln enthalten, wenn die grade Linie LN = s an dem Punkt L der Parabel eine Normallinie ist, d. i. für den Fall der gesuchten Tangente, und wenn man daher aus dem Satz von zwo gleichen Wurzeln den Werth der unbekannten Größe AN = u gefunden hat, so hat man den Punkt N; von diesem ziehe man nun an L eine grade Linie NL und an L senkrecht auf NL die grade Linie LT, so ist die letztere die gesuchte Tangente.

Um nun die unbekannte u aus dem Satz von zwo gleichen Wurzeln zu bestimmen, vergleiche man die Glieder der Gleichung mit den Gliedern einer andern, welche zwo gleiche Wurzeln hat, nämlich mit $x^2 - 2ex + e^2 = 0$, auf folgende Art

$$\begin{array}{l} x^2 - 2ux + u^2 = 0 \\ \quad\;\; + ux - s^2 \\ x^2 - 2ex + e^2 = 0; \end{array}$$

Aus Vergleichung der mittlern Glieder erhält man $-2u + a = -2e$, also $u = \frac{a + 2e}{2}$, aber $e = x$, folglich $u = \frac{a}{2} + x$; nimmt man also von Q aus $QN = \frac{1}{2}a$, so wird NL die Normale, und LT, welche auf sie senkrecht ist, wird die Tangente der krummen Linie an L.

Statt

Statt daß man die obige Gleichung mit einer andern, welche zwo gleiche Wurzeln hat, vergleicht, kann man sie auch mit irgend einer arithmetischen Reihe z. B. 3, 2, 1, multipliciren:

$$\begin{array}{ccc} x^2 & - 2ux & + u^2 = 0; \\ & + a & - s^2 \\ 3, & 2, & 1. \end{array}$$

Das Produkt ist $3x^2 - 4ux + u^2 = 0$, aber
$$\qquad + 2a \quad - s^2$$
$s^2 = u^2 - 2ux + x^2 + y^2$ und für die Parabel ist $y^2 = ax$, also $s^2 = u^2 - 2ux + x^2 + ax$; diesen Werth nun statt s^2 gesetzt, giebt $2x^2 - 2ux + ax = 0$, also $u = \frac{1}{2}a + x$, wie vorhin. Man würde seine Absicht noch geschwinder erreicht haben, wenn man mit der arithmetischen Reihe 2, 1, 0. multiplicirt hätte.

fig. 3.

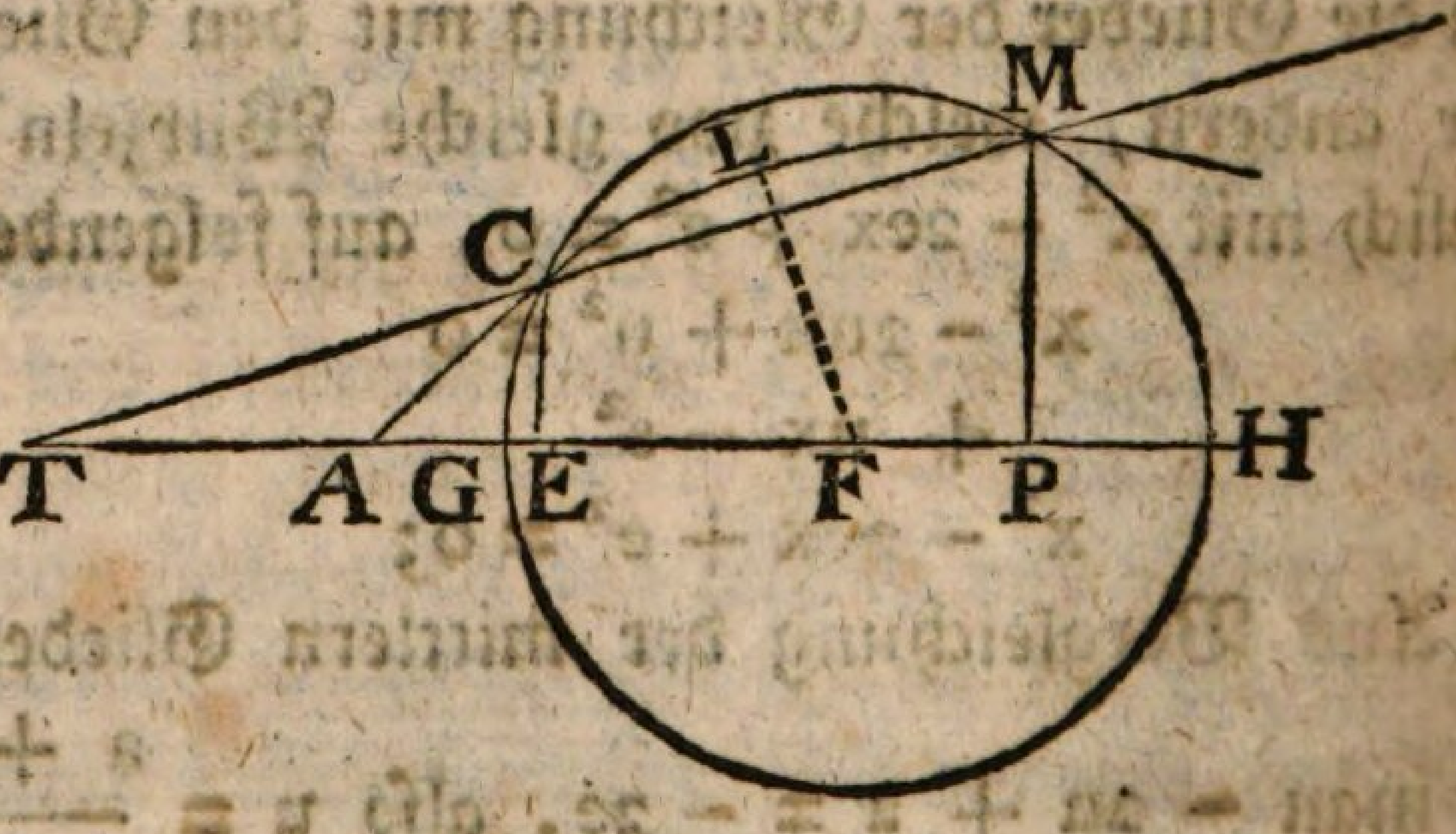
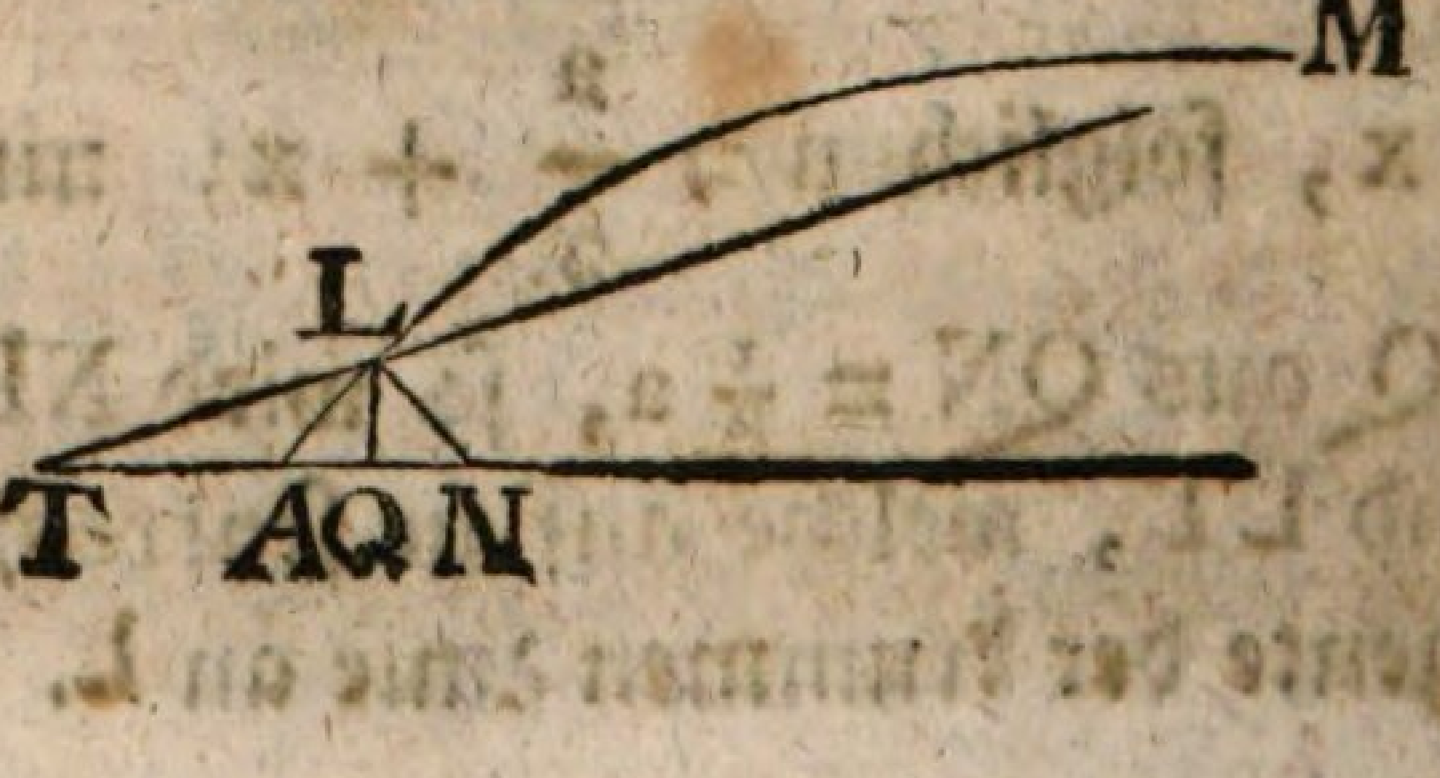


fig. 4.



4. Es

4. Es sei $x^3 = ay^2$ für die cubische Parabel, so erhält man, wenn man den Werth von y^2 aus der allgemeinen Formel (no. 3.) substituirt, $x^3 + ax^2 - 2aux + au^2 = 0$; diese vergleiche man, weil
$$- as^2$$
sie vom dritten Grade ist mit dem Produkt der Gleichung $x^2 - 2ex + e^2 = 0$ in $x - f = 0$

$$x^3 + ax^2 - 2aux + au^2 = 0,$$
$$- as^2$$

$$x^3 - 2ex^2 + e^2x - e^2f = 0$$
$$- f \quad + 2ef$$

Aus Vergleichung der ersten Glieder hat man $- 2e - f = a$, also $f = - a - 2e$; die Vergleichung der dritten Glieder giebt $e^2 + 2ef = - 2au$, und wenn man den schon gefundenen Werth von f substituirt, so wird $u = \frac{3e^2 + 2ae}{2a} = \frac{3x^2 + 2ax}{2a}$, weil $e = x$.

Nun multiplicire man die Gleichung mit der arithmetischen Reihe 3, 2, 1, 0

$$x^3 + ax^2 - 2aux + au^2 = 0$$
$$- as^2$$
$$3, \quad 2, \quad 1, \quad 0;$$

so erhält man

$$3x^3 + 2ax^2 - 2aux = 0;$$

und daher wie vorhin $u = \frac{3x^2 + 2ax}{2a}$

5. Was die Auswahl der arithmetischen Reihen betrift, so kann man bemerken, daß mei-

stens diejenige die bequemste ist, welche die Exponenten von den Potenzen desjenigen Buchstabens, nach dem die Gleichung geordnet ist, mit einander machen, so, daß man mit dem höchsten Exponenten die Reihe anfängt.

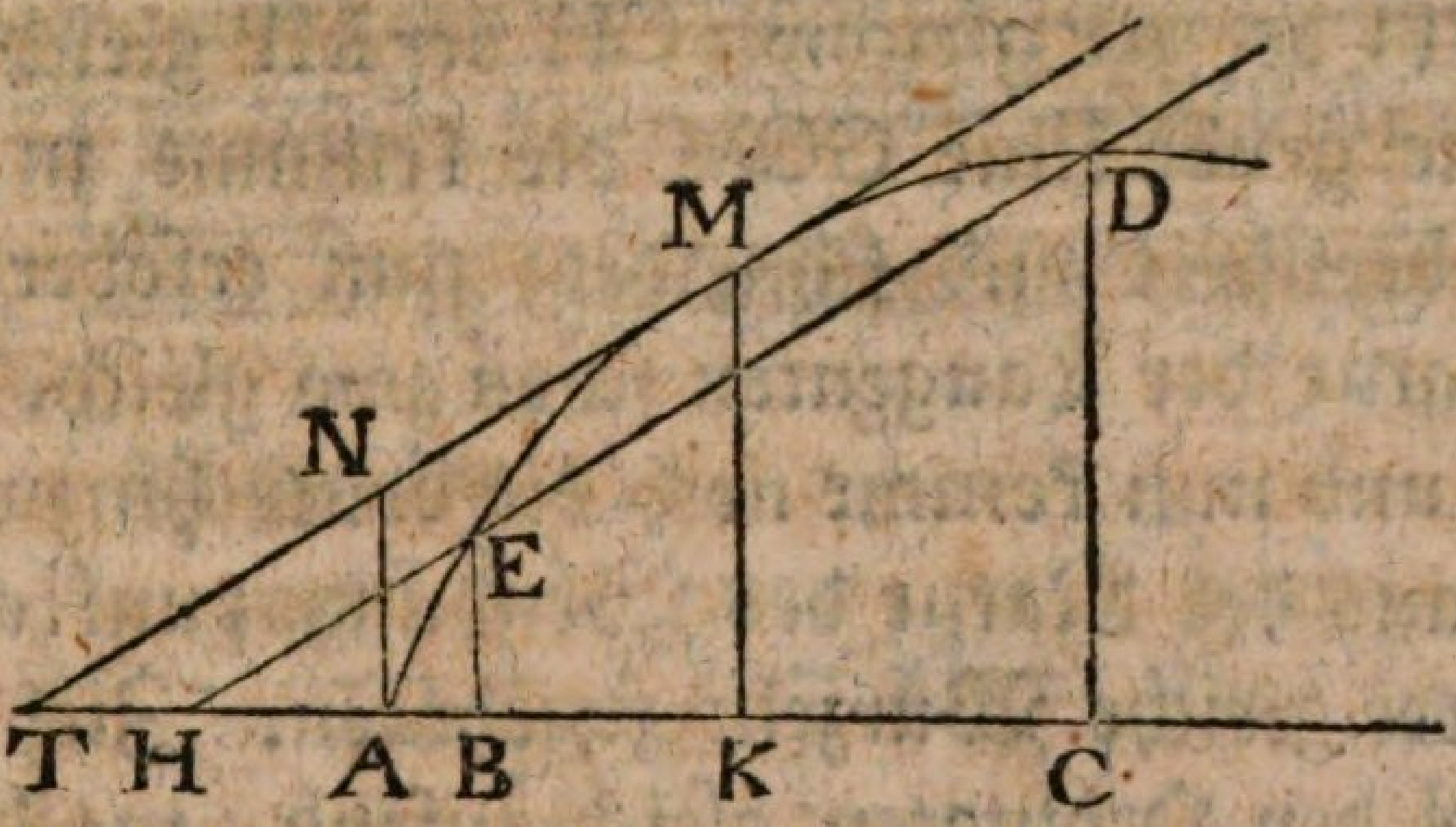
6. Eine andere von dem bisherigen Verfahren etwas verschiedene aber vielleicht einfachere Art, dergleichen Aufgaben aufzulösen, und die sich auch auf die Wendungs- und Rückkehrpunkte anwenden läßt, ist folgende.

fig. 5. AEMD sei eine krumme Linie, die von der graden HED in den Punkten E, D, geschnitten wird; AB, AC = x seien die Abscissen, und BE, CD = y die zugehörigen Ordinaten, so ist klar, daß wenn die grade Linie HD zur Tangente TM an dem Punkt M der krummen Linie wird, alsdann die beiden Punkte E, D, in M zusammenfallen, und folglich die beiden Abscissen AB, AC gleichwie die zugehörigen Ordinaten BE, CD unter einander gleich werden müssen. Man richte die AN den Ordinaten gleichlaufend auf, und es sei AT = u, AN = s, so erhält man aus der Aehnlichkeit der Dreiecke TAN, TKM, $u : s = u + x : y$, also $y = \frac{us + sx}{u}$ und $x = \frac{uy - as}{s}$; diese Werthe statt y oder statt x in der Gleichung für die gegebene krumme Linie substituirt, so erhält man daraus eine andere, die

zwo

zwo gleiche Wurzeln haben muß, wenn AT, AN so beschaffen sind, daß die grade Linie TNM die krumme berühret; vergleicht man diese daher mit einer andern von zwo gleichen Wurzeln, oder multiplicirt sie durch eine arithmetische Reihe, so ergiebt sich der Werth für AT oder AN, und wenn die eine bekannt ist, so weiß man auch die andere. Beispiele übergehe ich hier, weil die Art zu verfahren völlig mit der oben gebrauchten einerlei ist.

fig. 5.



7. Gleichwie die Methode von Erfindung des Größten und Kleinsten und der Tangenten in den Gleichungen allemal zwo gleiche Wurzeln voraussetzt, so erfodern die Wendungs- und Rückkehrpunkte in den Gleichungen allemal drei gleiche Wurzeln. Durch einen Wendungspunkt versteht man nämlich einen solchen Punkt, wo die Krümme anfängt erhaben zu werden, da sie zuvor hohl war, oder umgekehrt; und durch einen Rückkehrpunkt eine solche Stelle, wo die krumme Linie anfängt, sich wieder nach der Ge-

 gend

gend, wo sie herkam, zurück zu krümmen, sie mag da hohl oder erhaben werden.

fig. 6. Es sei F ein Wendungspunkt in der krummen Linie ACFM, und GCM eine grade Linie, die sie in C berühre und in M schneide, so ist klar, daß je mehr sich der Berührungspunkt C dem Wendungspunkt F nähert, auch der Punkt M dem F um so viel näher kommen müsse, so, daß C und M zugleich in F fallen werden, und AH der AP gleichwie CH der MP gleich wird, und die grade Linie GCM die krumme in F zugleich berühret und schneidet; nun erfodert aber die Natur der Tangenten schon zwo gleiche Wurzeln, und nun kommt noch die dritte hinzu, also folgt aus der Natur des Wendungspunkts, daß ihm drei gleiche Wurzeln zugehören. Zieht man die AN den Ordinaten gleichlaufend, macht AN = s, AT = u, und zieht TNF, so giebt die Aehnlichkeit der Dreiecke TAN, TVF, $y = \frac{us + sx}{u}$ und $x = \frac{uy - us}{s}$, wenn AV = x, VF = y gesetzt wird. Setzt man nun einen dieser Werthe statt x oder statt y in die Gleichung für die krumme Linie, so muß die Gleichung, welche herauskommt, drei gleiche Wurzeln haben, wenn AT oder AN von der Art sind, daß die grade aus T durch N gezogene Linie der krummen im Wendungspunkt F begegnet.

Aehnliche

Aehnliche Schlüsse gelten von der krummen Linie ACM, wenn diese in C einen Rück- fig. 7. kehrpunkt hat, weil die Tangente TC der krummen Linie diese an eben dem Punkt schneidet, und daher in diesem Fall wie vorhin drei gleiche Wurzeln entstehen.

AFS sei eine krumme Linie, für die $ay^2 - xy^2 - a^2x = 0$, wo $AQ = x$, $QF = y$, und F sei fig. 8. der Rückkehrpunkt, den man sucht. Setzt man nun $AT = u$, und die den Ordinaten gleichlaufende $AV = s$, so erhält man, wenn man statt x den Werth $\frac{uy - us}{s}$ in der Gleichung für die krumme Linie substituirt,

$$\begin{matrix} y^3 - \frac{asy^2}{u} + a^2y - a^2s = 0; \\ - sy^2 \end{matrix}$$

die drei gleiche Wurzeln haben muß, und man erhält daher, wenn man sie mit einer Gleichung, die drei gleiche Wurzeln hat, vergleicht, oder sie durch zwo arithmetische Reihen multiplicirt, folgendes:

Man multiplicire sie zuerst durch die Reihe 1, 0, − 1, − 2, und das Produkt

$$y^3 \; * \; - a^2y + 2a^2s = 0,$$

wieder von neuem durch die Reihe 3, 2, 1, 0,

 so

so findet man $3y^3 - a^2y = 0$, und daher $y^2 = \frac{a^2}{3}$, und dieser Werth in die gegebene Gleichung für die krumme Linie gesetzt, giebt endlich $x = \frac{1}{4} a$;

fig. 6.

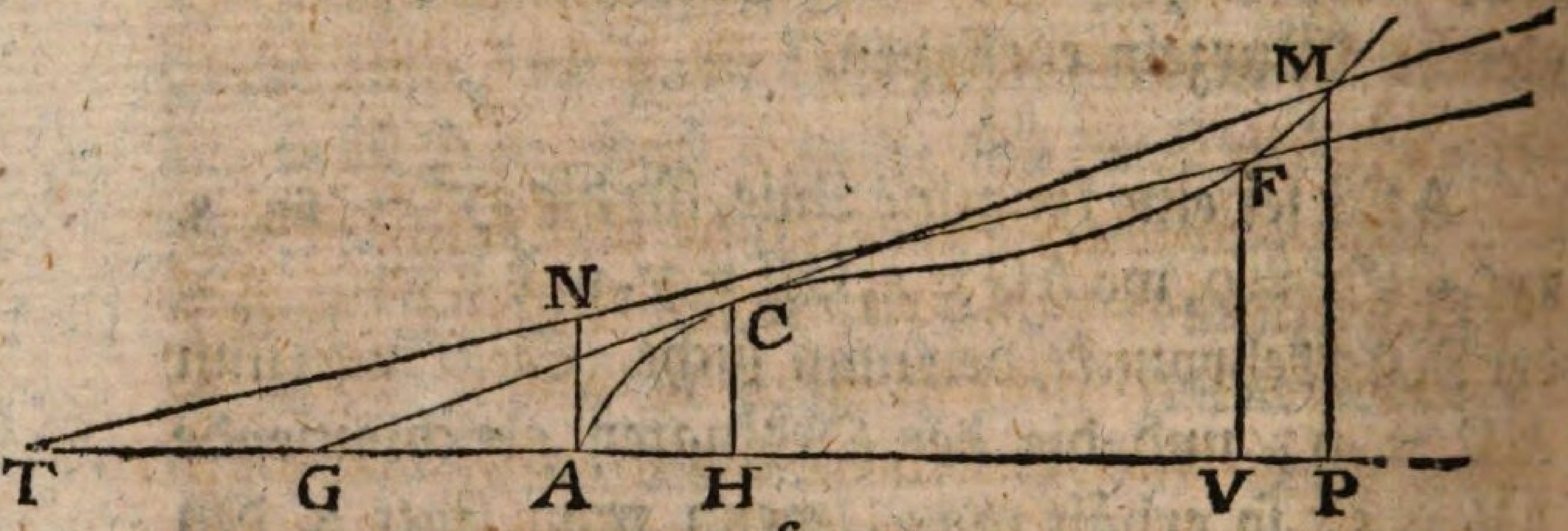


fig. 7.

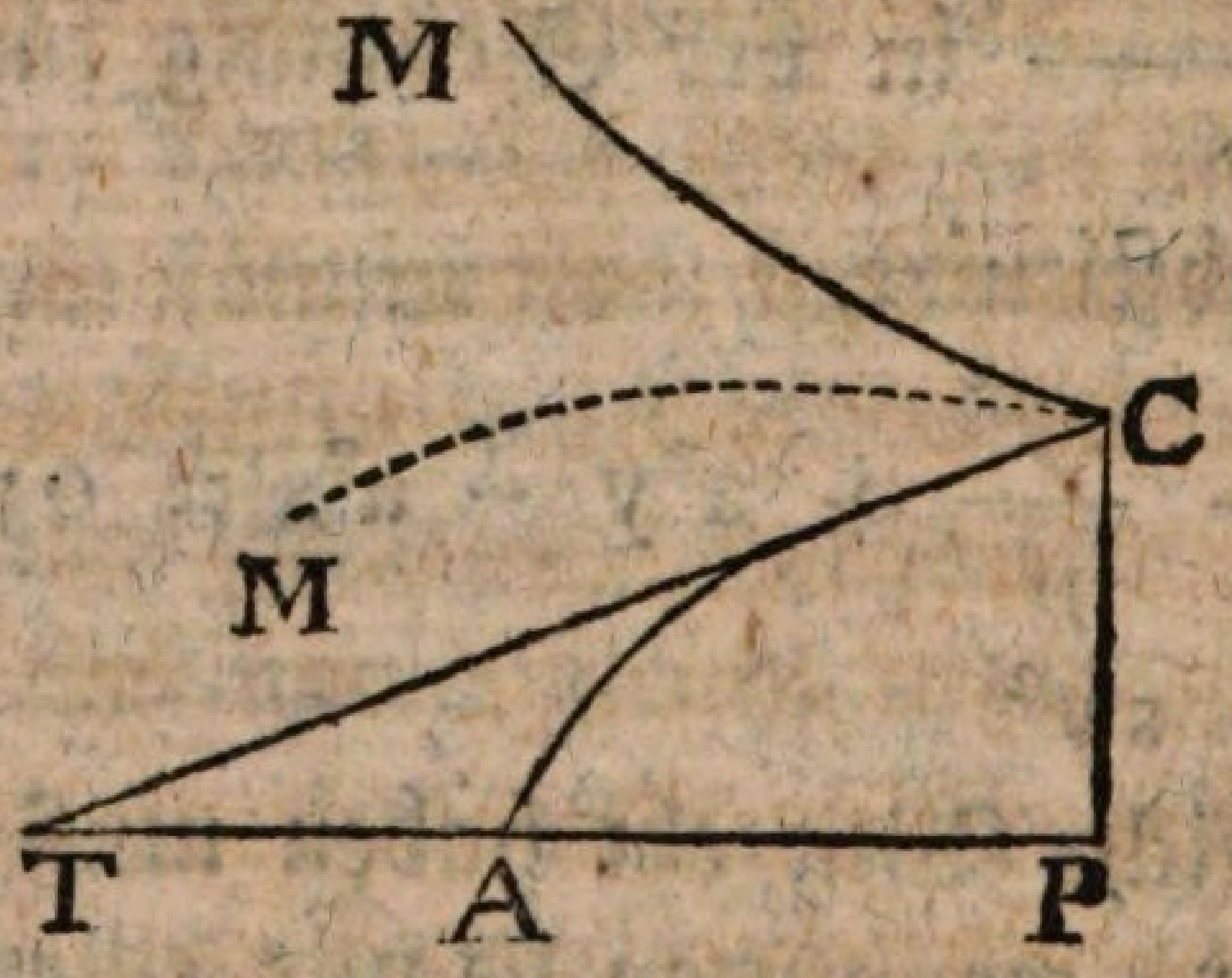
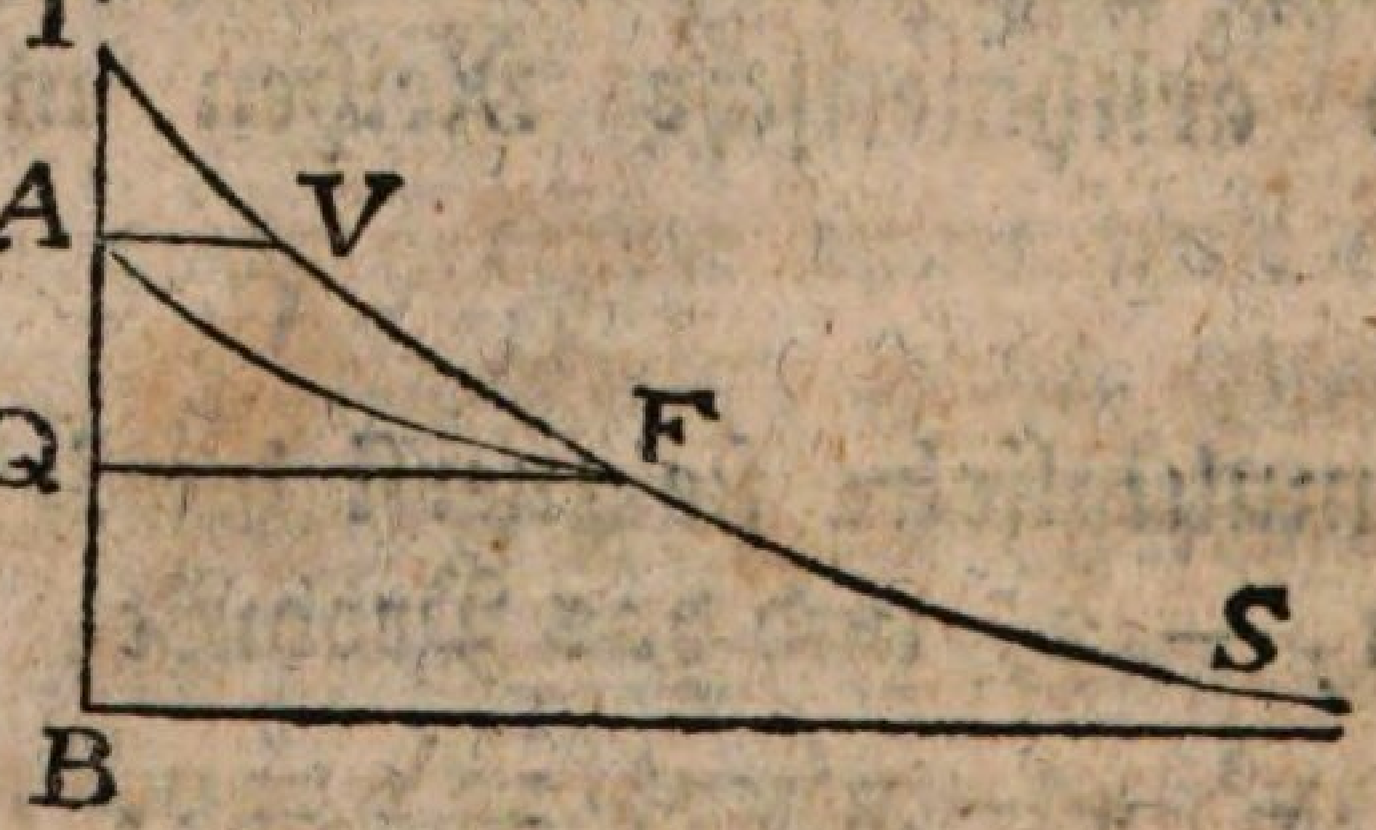


fig. 8.



8. Die Art, die Rückkehrpunkte zu finden, ist mit der Art, die Wendungspunkte zu finden, völlig einerlei. Um daher beiderlei Punkte von einander unterscheiden zu können, muß man durch wirkliche Construktion den Gang der krummen Linie kennen lernen, und die Sache daraus beurtheilen.

Eben diese Zweideutigkeit findet sich auch in Erfindung des Größten und Kleinsten; die Rechnung selbst entscheidet nämlich nicht, ob z. B. eine gefundene Ordinate unter allen die größte oder die kleinste sei, diese Zweideutigkeit läßt sich blos durch Betrachtung der Figur heben.

Es würde unnütz sein, dem, was in diesen acht Absätzen gesagt worden ist, mehreres beizufügen, weil diejenigen, welche diese Lehre in ihrem ganzen Umfang kennen lernen wollen, ohnehin die nöthigen Gründe von der Analysis des Unendlichen erlernen müssen, wo sie das bisherige weit ausführlicher vorgetragen finden werden. Ich wende mich daher nunmehro wieder zu dem Buche selbst.

§. 699. *

Wenn eine cubische Gleichung, deren zweites Glied fehlet, $x^3 = ax + b$, so giebt die Cardanische Regel

$$x = \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2}b + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{27}a^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2}b - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{27}a^3\right)}\right)} = m + n;$$

Man dividire $x^3 - ax - b$ durch $x - m - n$

$$\begin{array}{l|l|l} x-m-n & x^3 - ax - b & x^2+(m+n)x+(m+n)^2-a \\ & x^3-mx^2-nx^2 & \\ \hline & (m+n)x^2-ax-b & \\ & (m+n)x^2-(m+n)^2x & \\ \hline & [(m+n)^2-a]x-b & \\ & [(m+n)^2-a]x-(m+n)^3+(m+n)a & \\ \hline & (m+n)^3-(m+n)a-b & \end{array}$$

Dieser Rest aber ist = 0 (700), folglich $x^2 + (m+n)x + (m+n)^2 - a = 0$, mithin sind die beiden übrigen Wurzeln

$$x = \frac{-(m+n) \pm (m-n)\sqrt{-3}}{2};$$

diesen Ausdruck erhält man auch, wenn man in der obigen Formel $x = m + n$ die m durch $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ und die n durch $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ oder auch m durch $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ und n durch $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ multipliciret, denn es ist

$$\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \sqrt[3]{1} \quad (240.)$$

Man betrachte den ersten Ausdruck $x = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{27}a^3)})} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{27}a^3)})}$, so erhellet, daß $\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{27}a^3)}$ möglich oder unmöglich wird, nachdem $\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{27}a^3$ bejaht oder verneint ist. Man hat demnach eine

doppelte Aufgabe aufzulösen: 1.) Die Cubikwurzel aus einer zweitheilichten Größe, wovon das eine Glied möglich, das andere unmöglich ist, zu finden. 2.) Die Cubikwurzel aus einer zweitheilichten Größe, wovon ein Glied rational, das andere irrational ist, zu finden. Die erste wird §. 702. aufgelöst. $\sqrt[3]{(K + \lambda)} = P + Q \sqrt{-1}$ und $\sqrt[3]{(K - \lambda)} = P - Q \sqrt{-1}$, wo P und Q aus diesen beiden cubischen Gleichungen $P^3 - \frac{3}{4} e P = \frac{1}{4} K$, und $Q^3 - \frac{3}{4} e Q = - \frac{1}{4} L$ zu bestimmen sind, da $L = \frac{\lambda}{\sqrt{-1}}$ und $e = \sqrt[3]{(K^2 + L^2)}$. Diese Methode wird durch ein Beispiel (703.) erläutert; es sei nämlich $K = 81$, $\lambda = 30 \sqrt{-3}$, also $L = 30 \sqrt{3}$, $K^2 + L^2 = 6561 + 2700 = 9261$, und $e = \sqrt[3]{9261} = 21$; also hat man diese Gleichungen aufzulösen $P^3 - \frac{63}{4} P = \frac{81}{4}$, und $Q^3 - \frac{63}{4} Q = - \frac{30}{4} \sqrt{3}$; wenn in der ersten von diesen Gleichungen das letzte Glied als ein Produkt aus allen Wurzeln in einander angesehen wird, so ist klar, daß es sich durch $\frac{9}{2}$ wird theilen lassen; man versuche daher, ob nicht $\frac{9}{2}$ eine Wurzel der cubischen $P^3 - \frac{63}{4} P = \frac{81}{4}$ sei, und substituire also $\frac{9}{2}$ statt P; dieß giebt $\frac{729}{8} - \frac{567}{8} = \frac{81}{4}$. Da also $\frac{9}{2}$ in der That eine Wurzel ist, so ergeben sich die beiden andern, wenn man $P^3 - \frac{63}{4} P - \frac{81}{4}$ durch $P - \frac{9}{2}$ dividirt, dadurch erhält man nämlich

$$P - \tfrac{9}{2} \,|\, P^3 - \tfrac{63}{4} P - \tfrac{81}{4} \,|\, P^2 + \tfrac{9}{2} P + \tfrac{18}{4}$$

$$\begin{array}{l} P^3 - \tfrac{18}{4} P^2 \\ \hline \quad \tfrac{18}{4} P^2 - \tfrac{63}{4} P - \tfrac{81}{4} \\ \quad \tfrac{18}{4} P^2 - \tfrac{81}{4} P \\ \hline \qquad \tfrac{18}{4} P - \tfrac{81}{4} \\ \qquad \tfrac{18}{4} P - \tfrac{81}{4} \\ \hline \qquad\quad * \end{array}$$

also $P^2 + \frac{9}{2} P + \frac{18}{4} = 0$, deren Wurzeln -3 und $-\frac{3}{2}$ sind. Die zwote Gleichung $Q^3 - \frac{63}{4} Q = -\frac{30}{4} \sqrt{3}$ löst man so auf: $\frac{30}{4} \sqrt{3}$ als das letzte Glied in ihr läßt sich durch $\frac{1}{2} \sqrt{3}$ theilen, man versuche also, ob diese Größe eine Wurzel der Gleichung ist; die Probe giebt $\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{63\sqrt{3}}{8} = -\frac{30}{4} \sqrt{3}$; da also ein Werth von $Q = \frac{1}{2} \sqrt{3}$, so dividire man $Q^3 - \frac{63}{4} Q + \frac{30}{4} \sqrt{3}$ durch $Q - \frac{1}{2} \sqrt{3}$, und die Rechnung giebt wie vorhin $Q^2 + \frac{1}{2} Q\sqrt{3} - 15 = 0$, oder $Q^2 + \frac{1}{2} Q\sqrt{3} + \frac{3}{16} = \frac{3 \cdot 81}{16}$, deren Wurzeln $2\sqrt{3}$ und $-\frac{5}{2}\sqrt{3}$ sind. Es sei demnach $P = -3$ und $Q = 2\sqrt{3}$, so wird $\sqrt[3]{(81+30\sqrt{-3})} = P+Q\sqrt{-1} = -3+2\sqrt{-3}$ und $\sqrt[3]{(81 - 30\sqrt{-3})} = -3 - 2\sqrt{-3}$. Weil in der Gleichung $P^3 - \frac{3}{4} eP = \frac{1}{4} K$ die Größe $\frac{1}{4} K$ möglich ist, so muß auch wenigstens eine Wurzel eine mögliche Größe sein; und eben das gilt auch von der Gleichung $Q^3 - \frac{3}{4} eQ = -\frac{1}{4} L$; man

man sehe indessen die Erinnerung im Buche (721. S. 380. unten.)

§. 709.

I. Die Summe der beiden Größen $P + Q\sqrt{-1}$ und $P - Q\sqrt{-1}$ ist $= 2P$, und das Produkt aus ihnen $= P^2 + Q^2$ also eine mögliche Größe.

II. $(P + Q\sqrt{-1}) . \left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right) + (P - Q\sqrt{-1}) \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right) = (- P - Q\sqrt{-1} + P\sqrt{-3} - Q\sqrt{3} - P + Q\sqrt{-1} - P\sqrt{-3} - Q\sqrt{3}) : 2 = - P - Q\sqrt{3}$, also die Summe möglich. Ferner

$$(P + Q\sqrt{-1})(P - Q\sqrt{-1}) = P^2 + Q^2$$ und

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)\left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right) = 1;$$

also ist auch das Produkt $= P^2 + Q^2$ eine mögliche Größe.

III. $(P + Q\sqrt{-1}) \left(\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\right) + (P - Q\sqrt{-1}) . \left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right) = (- P - Q\sqrt{-1} - P\sqrt{-3} + Q\sqrt{3} - P + Q\sqrt{-1} + P\sqrt{-3} + Q\sqrt{3}) : 2$, also die Summe $= - P + Q\sqrt{3}$ und das Produkt $(P^2 + Q^2) \left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)$

(-1

$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) = P^2 + Q^2$ also möglich.

Hätte man aber diese Größen genommen: $(P+Q\sqrt{-1})\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)+(P-Q\sqrt{-1})\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) = (-P-Q\sqrt{-1}+P\sqrt{-3}-Q\sqrt{3}-P+Q\sqrt{-1}+P\sqrt{-3}+Q\sqrt{3}):2$, so wäre die Summe $= +P.(-1+\sqrt{-3})$, und weil $(P+Q\sqrt{-1})(P-Q\sqrt{-1}) = P^2+Q^2$, und $\frac{(-1+\sqrt{-3})^2}{2} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, so wird das Produkt $= (P^2+Q^2)\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$; oder für

$(P+Q\sqrt{-1})\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)+(P-Q\sqrt{-1})(-1-\sqrt{-3}) =$
$(-P-Q\sqrt{-1}-P\sqrt{-3}+Q\sqrt{3}-P+Q\sqrt{-1}-P\sqrt{-3}-Q\sqrt{3}):2$

wird die Summe $= P(-1-\sqrt{-3})$ und das Produkt $(P^2+Q^2)\frac{(-1-\sqrt{-3})^2}{2} = P^2+Q^2 \frac{(-1+\sqrt{-3})}{2}$ also beide Größen, Summe und Produkt unmöglich.

Die

Die andere von den oben (699. das. Anm.) erwähnten Aufgaben ist diese: Aus einer zweitheilichten Größe, deren erster Theil rational, der andere aber irrational ist, die Cubikwuzel zu ziehen.

Es sei $\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})} = p+\sqrt{q}$, so wird

$$A+\sqrt{B} = p^3+3p^2\sqrt{q}+3pq+q\sqrt{q};$$

$$A = p^3+3pq \text{ und } \sqrt{B} = (3p^2+q)\sqrt{q}$$

$$\frac{A-p^3}{3p} = q;$$

$$\sqrt{\frac{B}{q}} = 3p^2+q$$

$$\frac{B}{q} = 9p^4+6p^2q+q^2$$

und wenn man den Werth von q substituirt, so wird

$$\frac{3pB}{A-p^3} = 9p^4 + \frac{6p^2(A-p^3)}{3p} + \frac{(A-p^3)^2}{9p^2}$$

$$\frac{27Bp^3}{A-p^3} = 81p^6+18p^3(A-p^3)+(A-p^3)^2$$

$$27Bp^3 = 81Ap^6-81p^9+18A^2p^3-36Ap^6+18p^9 + A^3-3A^2p^3+3Ap^6-p^9$$

und

$$p^9-\tfrac{3}{4}Ap^6-\tfrac{3}{64}(5A^2-9B)p^3-\tfrac{1}{64}A^3 = 0;$$

Man bemerke: wenn $\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})} = p+\sqrt{q}$, so wird $\sqrt[3]{(A-\sqrt{B})} = p-\sqrt{q}$, denn es ist $A-\sqrt{B} = p^3-3p^2\sqrt{q}+3pq-q\sqrt{q}$, folglich $A = p^3+3pq$, und $-\sqrt{B} = (3p^2+q)(-\sqrt{q})$

($-\sqrt{q}$) oder wenn wir uns eben des Kunstgrifs, den wir oben (702) gebrauchten, bedienen; $(A+\sqrt{B})(A-\sqrt{B}) = A^2 - B$; man setze $\sqrt[3]{(A^2-B)} = \varepsilon$, $(A+\sqrt{B})(A-\sqrt{B}) = [(p+\sqrt{q})(p-\sqrt{q})]^3 = (p^2-q)^3$, also $\varepsilon = p^2 - q$ oder $q = p^2 - \varepsilon$; dieser Werth von q in der Gleichung $\frac{A-p^3}{3p} = q$ substituirt, giebt $\frac{A-p^3}{3p} = p^2 - \varepsilon$ und $p^3 - \frac{3}{4}\varepsilon p = \frac{1}{4}A$. Man setze auch $q + \varepsilon = p^2$ in der Gleichung $\sqrt{\frac{B}{q}} = 3p^2 + q$, so erhält man $\sqrt{\frac{B}{q}} = 4q + 3\varepsilon$; $\frac{B}{q} = 16q^2 + 24\varepsilon q + 9\varepsilon^2$, und $q^3 + \frac{1}{2}\varepsilon q^2 + \frac{9\varepsilon^2 q}{16} - \frac{1}{16}B = 0$; oder man schaffe das zweite Glied dadurch, daß man $q = t - \frac{\varepsilon}{2}$ setzt, weg, so erhält man folgende Gleichung

$$t^3 - \frac{3}{16}\varepsilon^2 t - \left(\frac{\varepsilon^3 + 2B}{32}\right) = 0.$$

Löst man also die beiden cubischen Gleichungen auf, so findet man den Werth von p und q, und der Gleichung $\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})}$ Wurzel ist $p + \sqrt{q}$, (722.)

Nimmt man (721. S. 380. oben) $\sqrt[3]{(-20+\sqrt{392})}$, so wird $A^2 = 400$ und $B = 392$, also

$\varepsilon =$

$z = \sqrt[3]{(A^2 - B)} = 2$, und man hat die Gleichungen $p^3 - \frac{3}{2}p = -5$ und $q^3 + 3q^2 + \frac{9}{4}q = \frac{49}{2}$; aus der ersten findet man sogleich $p = -2$, und aus der letzten $q = 2$, folglich die gesuchte Wurzel $p + \sqrt{q} = -2 + \sqrt{2}$;

Eben das läßt sich noch leichter aus der Gleichung $t^3 - \frac{3}{4}t = \frac{99}{4}$, wo $t = 3$ und daher $q = 2$ ist, schließen. Die Richtigkeit dieser Werthe erhellet aber aus der Probe, indem $(-2 + \sqrt{2})^3 = -20 + 14\sqrt{2} = -20 + \sqrt{392}$; der cubischen Gleichung $x^3 = 6x - 40$ Wurzel ist also $\sqrt[3]{(-20 + \sqrt{392})} + \sqrt[3]{(-20 - \sqrt{392})} = -2 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = -4$, und $\frac{x^3 - 6x + 40}{x + 4} = x^2 - 4x + 10 = 0$; aus dieser quadratischen Gleichung geben sich die beiden übrigen Wurzeln $x = 2 \pm \sqrt{-6}$; und $(2 + \sqrt{-6})(2 - \sqrt{-6}) = 10$, also durch -4 multiplicirt $= -40$, welches das Produkt aus allen dreien Wurzeln ist, und $(x - 2 + \sqrt{-6})(x - 2 - \sqrt{-6})(x + 4) = x^3 - 6x + 40$. S. §. 721.)

§. 704. *

$\frac{P^3 - K}{3P} = Q^2$, und $\frac{(P^3 - K)Q}{3P} = 3P^2Q - L$ (702.) oder aus dieser letztern Gleichung $Q = \frac{3PL}{8P^3 + K}$, daher verwandelt sich die erste in

diese

diese $\frac{P^3 - K}{3P} = \frac{9P^2L^2}{64P^6 + 16KP^3 + K^2}$, und nach gehöriger Rechnung

$$P^9 - \tfrac{3}{4}KP^6 - \tfrac{3}{64}P(5K^2 + 9L^2) - \tfrac{1}{64}K^3 = 0$$

§. 711. *

$$\begin{array}{l} x + P + Q\sqrt{3} = 0 \\ x + P - Q\sqrt{3} \\ \hline x^2 + 2Px + P^2 - 3Q^2 = 0 \end{array}$$

multiplicirt durch

$$\begin{array}{l} x - 2P \\ \hline x^3 - 3.(P^2 + Q^2)\,x - 2P(P^2 - 3Q^2) = 0; \end{array}$$

§. 713. *

$$\begin{array}{l} x + \frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{2}\sqrt{-3} \\ x + \frac{m+n}{2} - \frac{m-n}{2}\sqrt{-3}, \\ \hline x^2 + (m+n)x + \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 \end{array}$$

oder $x^2 + (m+n)x + m^2 - mn + n^2$ multiplicirt durch

$$\begin{array}{l} x - (m+n) \\ \hline x^3 + (m+n)\,x^2 + (m^2 - mn + n^2)\,x \\ \quad - (m+n)\,x^2 - (m+n)^2\,x - (m^2 - mn \\ \qquad + n^2)\,(m+n) \end{array}$$

oder $x^3 - 3mnx - (m^3 + n^3) = 0$; es ist aber $3mn = a$ und $m^3 + n^3 = b$ 700. also $x^3 - ax - b = 0$.

Von

Von der Auflösung der biquadratischen Gleichungen S. die Algebre de M. Clairaut. Part. V. und die vollst. Anl. zur Alg. von Euler II. Th. I. Abschn. Cap. 13. und 15.

§. 724. *

III. Differenzreihe.	II. Differenzreihe.	Ite Differenzreihe.	y
		$y^1 - y$	y^1
	$y^2 - 2y^1 + y$	$y^2 - y^1$	y^2
$y^3 - 3y^2 + 3y^1 - y$	$y^3 - 2y^2 + y^1$	$y^3 - y^2$	y^3
$y^4 - 3y^3 + 3y^2 - y^1$	$y^4 - 2y^3 + y^2$	$y^4 - y^3$	y^4
$y^5 - 3y^4 + 3y^3 - y^2$	$y^5 - 2y^4 + y^3$	$y^5 - y^4$	y^5

Aus dieser Tafel ersieht man, daß, wenn man zu dem ersten Glied der dritten Differenzreihe $y^3 - 3y2 + 3y1 - y$ das erste Glied der zwoten D. R. $y^2 - 2y1 + y$ addirt, das zweite Glied der zwoten D. R. herauskommt, u. s. f. Denn es seien in irgend einer Reihe m zwei unmittelbar auf einander folgende Glieder a, b, so wird in der Reihe m + 1 ihre Differenz b – a sein, woraus man, wenn a dazu addirt wird, b erhält. Wenn man also zu dem fünften Glied der ersten D. R. $y5 - y4$ der Hauptreihe fünftes Glied y^4 addirt, so erhält man $y5$. Nennt man nun der Differenzreihen erste Glieder d′, d″, d‴, u. s. f. und der Hauptreihe Glieder L, M, N, O, P, so hat man

$$L = L$$
$$d' = M - L$$
$$d'' = N - 2M + L$$
$$d''' = O - 3N + 3M - L$$
$$d'''' = P - 4O + 6N - 4M + L$$

und daher

$$L = L$$
$$M = L + d'$$
$$N = L + 2d' + d''$$
$$O = L + 3d' + 3d'' + d'''$$
$$P = L + 4d' + 6d'' + 4d''' + d''''$$

Nun ist die Summe der Zahlen 1, 2, 3, 4 ... $n - 1 = \frac{n.(n-1)}{1.\ 2.}$, und die Summe von 1, 3, 6, 10 ... $n - 2 = \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}$ u. s. f. S. §§. 730 - 733 von den figurirten Zahlen, also ist die Summe der vorigen Reihe von n Gliedern $= \frac{n}{1} L + \frac{n.(n-1)}{1.\ 2} d' + \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\ 2.\ 3} d'' + \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} d'''$

Wir wollen diese Methode durch Beispiele erläutern

1.) 1 4 9 16

3 5 7 = der 1sten D. R.

2 2 = der 2ten D. R.

also ist die Summe der ersten n Glieder von der natürlichen Reihe der Quadraten = $\frac{n}{1} +$

$$\frac{n}{1} + \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{n.(n-1).n-2)}{3} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$
$$= \tfrac{1}{6} n.(n+1)(2n+1)$$

2.) 4 16 36 64
12 20 28 = der ersten Differenzreihe.
8 8 = der zwoten Differenzreihe.

also die Summe der Quadraten von den ersten n graden Zahlen =

$$4n + 6n.(n-1) + \frac{4n(n-1).(n-2)}{3}$$
$$= \frac{4n^3+6n^2+2n}{3} = \tfrac{2}{3} n.(n+1)(2n+1)$$

3.) 1 9 25 49
8 16 25 = 1. D. R.
8 8 = 2. D. R.

Die Summe von den Quadraten der ersten n ungraden Zahlen =

$$n + 4(n^2-n) + 4\left(\frac{n^3-3n^2+2n}{3}\right) = \frac{4n^3-n}{3}$$

4.) 1 8 27 64
7 19 37 = 1. D. R.
12 18 = 2. D. R.
6 = 3. D. R.

Die Summe der ersten n Cubikzahlen = n + 7

$$\left(\frac{n^2-n}{2}\right) + 2(n^3-3n^2+2n) + \frac{n^4-6n^3+11n^2-6n}{4}$$
$$= \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} = \frac{(n^2+n)^2}{4}.$$

5.) 8 64 216 512 1000
56 152 296 488 = 1. D. R.
96 144 192 = 2. D. R.
48 48 = 3. D. R.

Die Summe von n Gliedern der Hauptreihe $= 8n + 28(n^2 - n) + 16(n^3 - 3n^2 + 2n) + 2(n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n) = 2n^4 + 4n^3 + 2n^2$

6.) 1 27 125 343 729
26 98 218 386 = 1. D. R.
72 120 168 = 2. D. R.
48 48 = 3. D. R.

Die Summe von n Gliedern der Hauptreihe $= n + 13(n^2 - n) + 12(n^3 - 3n^2 + 2n) + 2(n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n) = 2n^4 - n$.

7.) 1 3 6 10 15
2 3 4 5 = 1. D. R.
1 1 1 = 2. D. R.

Die Summe der ersten n Triangularzahlen $= n + n^2 - n + \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{1}{6}n.(n+1).(n+2)$

8.) 1 5 12 22 35
4 7 10 13 = 1. D. R.
3 3 3 = 2. D. R.

also die Summe der ersten n fünfeckichten Zahlen $= n + 2(n^2 - n) + \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{2} = \frac{1}{2}n^2.(n+1)$

9.) 1 6 15 28 45
5 9 13 17 = 1. D. R.
4 4 4 = 2. D. R.

Also

Also der ersten n sechseckichten Zahlen Summe

$$= n + 5\left(\frac{n^2 - n}{2}\right) + 2\left(\frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{3}\right)$$

$$= \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6} = \tfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1).$$ u. s. f.

Hieraus fließen nun folgende Sätze:

1.) Die Summe irgend einer Anzahl von Gliedern in der Reihe der Quadraten verhält sich zu der Summe eben so vieler Glieder in der Reihe der Cubikzahlen, wie

$$(2 + 4n) : (3n^2 + 3n)$$

2.) Die Summe einer Anzahl von Gliedern in der Reihe der graden Quadraten verhält sich zur Summe eben so vieler Glieder in der Reihe der ungraden, wie

$$(2n + 2) : (2n - 1)$$

3.) Die Summe einer Anzahl von Gliedern in der Reihe der graden Cubikzahlen verhält sich zur Summe eben so vieler in der Reihe der ungraden, wie $(n + 1)^2 : (2n + \frac{1}{2})$

4.) Die Summe einer Anzahl von Gliedern in der Reihe der Triangularzahlen verhält sich zur Summe eben so vieler Quadratzahlen, wie

$$(n + 2) : (n^2 - 1)$$

5.) Die Summe mehrerer Glieder in der Reihe der Triangularzahlen verhält sich zur Summe eben so vieler Glieder in der Reihe der Cubikzahlen, wie

$$(2n + 4) : (3n^2 + 3n)$$

6.) Die Summe mehrerer Glieder in der Reihe der natürlichen Zahlen verhält sich zur Summe eben so vieler Glieder in der Reihe der Cubikzahlen, wie

$2 : (n^2 + n)$ und

7.) zur Summe eben so vieler Glieder in der Reihe der Quadraten, wie

$3 : (2n + 1)$

8.) Triang.	Quadr.	Fünfeckichte Zahl.	6eck.	7eck.	8eck.
$n+2$	$2n+1$	$3n$	$4n-1$	$5n-2$	$6n-3$

wo die unterschriebenen Zahlen die Verhältniß anzeigen, welche die Summe einer in einer figurirten Reihe genommenen Anzahl von Gliedern zur Summe eben so vieler in einer andern figurirten Reihe genommenen Glieder hat; wird die Reihe hier rückwärts fortgesetzt, so folgt $0n + 3$ zur Verhältnißzahl der natürlichen Zahlen; denn dieser ihre Summe ist $\frac{n.(n+1)}{2}$, die sich also zur Summe eben so vieler Triangularzahlen verhält, wie $\frac{n.(n+1)}{2} : (\frac{1}{6} n.(n+1).(n+2)) =$ $= \frac{1}{2} : \frac{1}{6}(n+2) = 3 : (n+2)$, daß also das in der Reihe hier vor $n+2$ vorhergehende Glied 3 ist.

§. 734.

Eigentlich folgen nun die Sätze 749; 750; daher wir sie auch hier vorausnehmen wollen. Es lassen sich aus dem Satz 750 noch viele ähnliche

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Langsdorf, Karl Christian <<von>>,

Erläuterungen der Kästnerischen Analysis endlicher Größen

Bd.: [1]

Mannheim (1776)

Math.p. 280 p-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082247-7
VD18 90242297